

ORSAY
Série A
N° d'ordre 543

Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le N° A - O - 3513

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Roland SENEOR

1^{re} THÈSE : FORMULES DE DYSON.

2^e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 29 Septembre 1969 devant la Commission d'examen

MM. F. LURÇAT Président

J. BROS

J. LASCOUX

P. LELONG

} Examineurs

ORSAY
Série A
N° d'ordre 543

Exemplaire inscrit
aux archives originales
du Centre de Documentation
C. N. R. S.
sous le N° A - O - 3513

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Roland SENEOR

1^{re} THÈSE : FORMULES DE DYSON.

2^e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 29 Septembre 1969 devant la Commission d'examen

MM. F. LURÇAT Président

J. BROS

J. LASCOUX

P. LELONG

} Examineurs

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORLÈANS

DE L'UNIVERSITÉ DE FRANCE

Pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES PHYSIQUES

Par

Roland SEHEOR



à Paris, le 10 Mars 1904

En présence de M. le Recteur, M. le Doyen, et de MM. les Membres du Jury

Le Président du Jury, M. le Doyen, et les Membres du Jury ont accepté la thèse

présentée par M. Roland SEHEOR

et ont décidé de lui conférer

le grade de Docteur en Sciences Physiques

à la condition qu'il sera

REMERCIEMENTS

Mes remerciements vont d'abord au Professeur Louis MICHEL, fondateur du Centre de Physique Théorique, qui m'a initié à la Physique et m'a constamment guidé et encouragé.

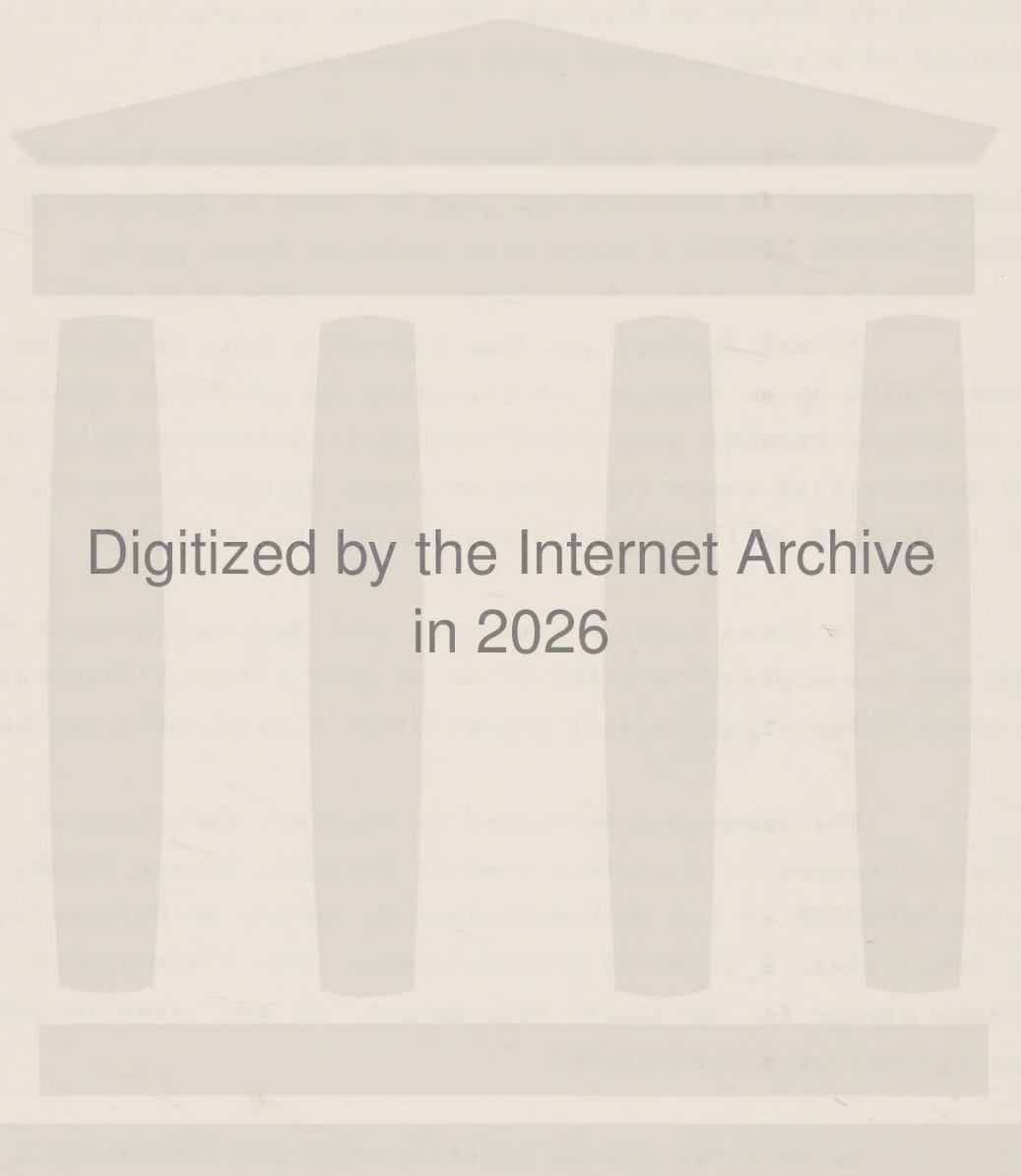
Je remercie aussi Monsieur le Professeur François LURÇAT d'avoir accepté de présider mon jury de thèse et Monsieur le Professeur Pierre LELONG d'avoir bien voulu en faire partie.

Il est évident que Jean LASCoux a joué un rôle de tout premier plan en me donnant une formation de physicien théoricien et en m'encourageant sans cesse jusqu'à l'achèvement de ce travail. Son universalité comme Physicien et comme Mathématicien n'a d'égal que le plaisir qu'il éprouve à transmettre son savoir.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement Jacques BROS qui a accepté de m'aider et de me guider dans l'élaboration de cette thèse et qui a fait preuve d'une incomparable patience.

Mes camarades du Centre de Physique Théorique et tout particulièrement le directeur Dimitri FOTIADI, Gérard FUCHS, Pierre RENOUARD et les Mathématiciens du Centre de Mathématiques, ont droit aussi à toute ma reconnaissance pour l'atmosphère amicale pleine de "critiques fructueuses" et de "conseils judicieux" dont ils ont su m'environner.

On ne livre pas de bataille sans une intendance à la hauteur ; que Mademoiselle LECUYER qui a assuré la frappe, Monsieur CORNET le tirage, Madame ANDALO qui a partagé leur misère et Mademoiselle POUDEROUS qui a supervisé le tout, sachent qu'ils ont mérité de "ma Physique"!!



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552201_0026

TABLE DES MATIERES

Pages

INTRODUCTION

1

1ère PARTIE

FORMULE CLASSIQUE DE DYSON

3

CHAPITRE I : EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS

4

I/ - La méthode géométrique

5

1. Notations et définitions

5

2. Les directions de genre temps

6

3. Les enveloppes P-convexes

11

1) Les enveloppes C-convexes

11

2) Les enveloppes P-convexes

13

4. Le théorème du double cône

15

5. Directions de genre temps et
hypoellipticité partielle

19

II/ - La méthode analytique

25

1. La position du problème

25

2. Le théorème du double cône

28

3. Les propriétés d'hypoellipticité

32

CHAPITRE II : HYPERBOLICITE ET EQUATION D'ONDE

35

I/ - Hyperbolicité et problème de Cauchy

35

1. Hyperbolicité

35

2. Ensembles réguliers. Surfaces de "genre espace"

39

3. Le problème de Cauchy

44

II/ - Application à l'équation d'onde

45

1. Généralités

45

2. Problème de Cauchy et principe de Huyghens

48

3. Représentation intégrale des solutions tempérées
de l'équation homogène

49

CHAPITRE III : LA REPRESENTATION DE DYSON	53
1. Le théorème de Gårding-Dyson	54
2. Les enveloppes $B(\Omega)$	59
3. La représentation de Jost-Lehmann-Dyson	63
4. La nature quasi-analytique des solutions obtenues	65
5. Fonctions analytiques liées à la représentation de Dyson	67
6. Domaine d'analyticité associé à la représentation de Dyson	78

2ème PARTIE

GENERALISATION DE LA FORMULE DE DYSON	80
INTRODUCTION	81
A GENERALIZATION OF DYSON'S FORMULA	83
CONCLUSION	106
REFERENCES	108

I N T R O D U C T I O N

Un des outils utilisé avec le plus de succès dans l'étude des propriétés analytiques des amplitudes de diffusion est la représentation de Jost-Lehmann-Dyson ([Jo 1], [Dy 1]). En particulier elle joue un rôle essentiel dans la démonstration, en théorie de Lehmann-Symanzik-Zimmermann (voir Lehmann, [Le 1]) et en théorie de Wightman (voir K. Hepp, [He 1]), de l'existence de relations de dispersion. Elle a été appliquée aussi, récemment, à l'étude des relations de commutation des courants à temps constant ([So 1]) et à l'obtention des règles de somme ([Ge 1]).

Dans une première partie nous traitons de façon très générale les différentes étapes qui conduisent à la démonstration de la représentation de Jost-Lehmann-Dyson. Ainsi l'accent est mis sur le rôle essentiel que tiennent dans cette démonstration les équations aux dérivées partielles.

Dans la deuxième partie nous exposons notre généralisation de la représentation de Jost-Lehmann-Dyson (ou formule de Dyson). L'utilité de cette généralisation réside dans le fait qu'elle est le pendant en théorie des champs de Haag-Araki de la représentation de Jost-Lehmann-Dyson en théorie des champs de Wightman ou de Lehmann-Symanzik-Zimmermann.

P R E M I E R E P A R T I E

F O R M U L E C L A S S I Q U E D E D Y S O N

I - LES EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS

Nous nous proposons dans ce chapitre d'étudier par deux méthodes différentes certaines propriétés des solutions des équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Essentiellement ce sont :

1) L'unicité locale ou la quasi-analyticité.

Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, soit u une solution de l'équation homogène $P(D)u = 0$. Supposons que sachant que u s'annule dans un ouvert Ω_1 nous puissions construire un ouvert Ω_2 , $\Omega_2 \supset \Omega_1$, ne dépendant que de Ω_1 et de $P(D)$, tel que u s'annule aussi dans Ω_2 , nous dirons alors que les solutions u satisfont une propriété d'unicité locale ou de quasi-analyticité.

2) L'hypoellipticité partielle.

Supposons que les solutions u , au sens d'un espace de distribution, de l'équation $P(D)u = 0$ possèdent la propriété suivante :

il suffit de les régulariser par rapport à un nombre restreint de variables pour qu'elles deviennent indéfiniment différentiable.

Nous dirons alors que $P(D)$ est partiellement hypoelliptique.

Moyennant quelques modifications mineures on peut évidemment définir ces deux notions dans le cas des équations inhomogènes.

Les deux méthodes proposées sont l'une, une méthode géométrique qui s'appuie sur la notion de direction genre temps, l'autre une méthode analytique centrée sur l'utilisation des transformées de Fourier-Laplace.

I. LA METHODE GEOMETRIQUE

1 - Notations et définitions

On désigne par Z l'espace numérique $\mathbb{R}_n$ et par Z' son dual pour le produit scalaire euclidien usuel. Les éléments courants de Z seront notés à l'aide des lettres grecques $\xi, \theta, \eta, \dots$, les lettres latines $x, y, z, \dots$ servant à noter ceux de Z' . Si $\{0\} \in E$, on notera $\dot{E}$ l'ensemble $E \setminus \{0\}$. Le produit scalaire sera noté $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$.

Si $P(\xi)$ est un polynôme à coefficients constants (dans $\mathbb{C}$), on lui associe l'"opérateur différentiel à coefficients constants" $P(D)$ obtenu à partir de $P(\xi)$ par la substitution $\xi_j \rightarrow \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} = D_j$. Il y a une correspondance biunivoque entre les polynômes et les opérateurs différentiels à coefficients constants.

Soit m le degré de $P(\xi)$; le terme homogène de plus haut degré, soit $P_m(\xi)$, contenu dans l'écriture de $P(\xi)$ est la partie principale de $P(\xi)$.

Def. La linéarité de $P(\xi)$ est l'ensemble $L_R(P) \subset Z$ défini par :

$$L_R(P) = \{ \eta \in Z \mid P(\xi + \tau \eta) = P(\xi) \quad \forall \tau \in \mathbb{R}, \forall \xi \in Z \} ,$$

$L_R(P)$ est un sous espace vectoriel de Z .

Def. On appelle dimension réduite de $P(\xi)$, et on note $n_R(P)$, la codimension de $L_R(P)$.

Si $n_R(P) = n$, $P(\xi)$ sera dit complet. $P(\xi)$ est un polynôme à coefficients complexes sur $Z/L_R(P)$.

Remarque : on définit généralement la linéarité de $P(\xi)$ par $L_{\mathbb{C}}(P) = \{\eta \in \mathbb{C}_n \mid P(\xi + \tau\eta) = P(\xi) \quad \forall \tau \in \mathbb{C}, \forall \xi \in \mathbb{C}_n\}$. $L_{\mathbb{C}}(P)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{C}_n$ et $P(\xi)$ est un polynôme sur $\mathbb{C}_n / L_{\mathbb{C}}(P)$. On définit comme précédemment la dimension réduite sur les complexes de $P(\xi)$, soit $n_{\mathbb{C}}(P)$. On a $n_{\mathbb{R}}(P) \geq n_{\mathbb{C}}(P)$.

Soit $C_R(P) = \{\xi \in \mathbb{Z} \mid P(\xi) = 0\}$,

Lemme : $C_R(P) + L_R(P) \subset C_R(P)$ si $C_R(P) \neq \emptyset$.

Soit en effet $\xi \in C_R(P)$, c'est-à-dire $P(\xi) = 0$; soit alors $\eta \in L_R(P)$, par définition de $L_R(P)$ on a :

$$P(\xi + \tau\eta) = P(\xi) = 0 \quad \text{pour tout } \tau \in \mathbb{R} ,$$

donc $\xi + \tau\eta \in C_R(P)$.

Si P est homogène, $C_R(P) \ni \{0\}$ et donc $L_R(P) \subset C_R(P)$.

2 - Les directions de genre temps [Ni 1]

Ne considérant que des parties de $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}'$, nous omettrons dorénavant l'indice R .

Def. $t \in \mathbb{Z}'$ est une direction de genre temps relativement à $P(\xi)$ si

$$C(P_m) \cap \{\xi \in \mathbb{Z} \mid t.\xi = 0\} \subset L(P_m) ,$$

où P_m désigne la partie principale de P .

On désigne par T_P l'ensemble des directions de genre temps de P . Comme la définition de ces directions ne fait intervenir que la partie principale homogène, on voit immédiatement que T_P est un cône symétrique. Nous omettrons aussi l'indice P lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur

le polynôme.

Soit $L(P)^*$ le dual de $L(P)$: $L(P)^* = \{x \in Z' \mid x.L(P) = 0\}$; c'est un sous espace vectoriel de Z' et :

Lemme : $T_P \subset L(P_m)^*$.

Ceci résulte de la définition d'un élément de T_P , et de la définition de $L(P)^*$.

Remarque : géométriquement, T_P se définit comme l'ensemble des normales aux plans passant par l'origine et ne rencontrant la variété $P_m(\xi) = 0$, ξ réel, que selon la linéarité de P_m .

Supposons^{*} $T_P \neq \emptyset$ et soit $t_o \in T_P$, $t_o \neq \{0\}$.

Notation : Γ_{t_o} est la composante connexe de t_o dans T .

Lemme : Γ_{t_o} est un cône ouvert convexe de $L(P_m)^*$.

Dem. On se ramène d'abord au cas où P_m est complet. En effet, soit $n(P_m) = j$ ($\leq n$) la dimension réduite de P_m , c'est-à-dire la dimension de $L(P_m)^*$; on peut toujours, par un changement de coordonnées se ramener à $L(P_m)^* = \{x \in Z' \mid x_{j+1} = \dots = x_n = 0\}$ et $P_m\{\xi\}$ devient un polynôme complet dans $\mathbb{R}_j$.

Nous supposons donc $L(P_m) = \emptyset$ d'où $L(P_m)^* = Z'$; T se définit alors par :

$$T = \{t \in Z' \mid C(P_m) \cap \{\xi \in Z \mid t.\xi = 0\} = \{0\}\} ,$$

définition qui est équivalente à :

* Il existe des P pour lesquels il n'y a aucune direction de genre temps. Par exemple :

$$P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 - \xi_4^2 .$$

$$T = \{t \in Z' \mid \xi \in \dot{C}(P_m) \Rightarrow t \cdot \xi \neq 0\}.$$

On voit alors sans trop de difficultés que cette définition est elle-même équivalente à :

$$T = \{t \in Z' \mid \xi \in \dot{C}(P_m), t_0 \cdot \xi > 0 \Rightarrow t \cdot \xi \neq 0\}.$$

Soit alors $t (t \neq t_0)$ un autre élément de Γ_{t_0} et puisque Γ_{t_0} est la composante connexe de t_0 , il existe un chemin $\gamma_{t_0 t}$ reliant t à t_0 ; soit ensuite $\xi \in \dot{C}(P_m)$ tel que $t_0 \cdot \xi > 0$, considérons alors l'application $f_\xi : T \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $t \mapsto t \cdot \xi$. Cette application est continue et donc l'image directe d'un ensemble connexe est connexe. Or d'après les conditions sur ξ , $f_\xi(T) \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ est l'union de deux ensembles connexes. Par suite l'image d'une composante connexe de T est dans l'une des composantes connexes de $\mathbb{R}$. Comme $f_\xi(t_0) > 0$, $f_\xi(\gamma_{t_0 t}) > 0$ et donc on peut définir X tel que :

$$X = \{t \in Z' \mid \xi \in \dot{C}(P_m), t_0 \cdot \xi > 0 \Rightarrow t \cdot \xi > 0\}.$$

On a $\Gamma_{t_0} \subset X \subset T$. Comme X est convexe (ceci résulte immédiatement de l'équation), X est connexe donc $X = \Gamma_{t_0}$. De plus, par définition Γ_{t_0} ne dépend pas du choix de t_0 dans Γ_{t_0} .

On vérifie sans peine que $\Gamma_{t_0} = -\Gamma_{-t_0}$.

Nous dirons que $t \in \Gamma_{t_0} \cup \Gamma_{-t_0}$ est une direction de genre temps de la classe $\{t_0\}$.

Dorénavant, nous désignerons les classes par des indices latins $i, j, \dots$ et les cônes par $\Gamma_i = \Gamma_i^+ \cup \Gamma_i^-$. L'indice i signifie qu'il existe $t_i \in T$ et $\Gamma_{t_i} = \Gamma_i^+$ (le choix des signes $+$ ou $-$ étant évidemment arbitraire). Enfin $t \in \{i\}$ signifie $t \in \Gamma_i$.

Lemme : T est une union finie de cônes Γ_i . Les cônes Γ_i sont deux à deux disjoints.

$$\Gamma_i = \Gamma_i^+ \cup \Gamma_i^- .$$

Les cônes $\Gamma_i^\pm$ sont des cônes convexes, ouverts dans $L(P_m)^*$.

Dem. Comme précédemment, on se ramène au cas où P_m est complet.

Considérons alors $C(P_m)$ la variété des zéros réels de P_m , et supposons

que $\dot{C}(P_m)$ soit formée de q composantes connexes : $C_1, \dots, C_q$;

d'après la symétrie de $\dot{C}(P_m)$, il existe un entier j , pair, tel que

$2j \leq q$ et tel que :

$$\dot{C}(P_m) = (C_{\sigma_1} \cup -C_{\sigma_1}) \cup \dots \cup (C_{\sigma_j} \cup -C_{\sigma_j}) \cup C_{\sigma_{2j+1}} \dots \cup C_{\sigma_q} ,$$

avec $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q)$ étant une permutation de $(1, 2, \dots, q)$,

$$C_{\sigma_i} \cap -C_{\sigma_i} = \emptyset \text{ pour } i \leq j \text{ et } C_{\sigma_i} = -C_{\sigma_i} \text{ pour } i \geq 2j+1 .$$

On a alors le résultat suivant :

Lemme : Si $q > 2j$, $T = \emptyset$.

En effet si $q > 2j$, ceci signifie qu'il existe au moins une composante C_σ telle que $C_\sigma = -C_\sigma$; dire alors qu'il existe une direction de genre temps t , c'est dire que le plan $t.\xi = 0$ qui sépare l'espace en deux ne rencontre pas $\dot{C}(P_m)$, donc C_σ qui se trouve dans un des demi-espaces.

Mais alors $-C_\sigma$ qui est égal à C_σ est dans l'autre demi-espace, ce qui est impossible.

Nous supposons donc $q = 2j$.

Il y a alors autant de classes de directions de genre temps qu'il y a de possibilités différentes de séparer les $2j$ cônes en deux groupes de j cônes à l'aide d'hyperplans passant par l'origine et ne rencontrant pas $\dot{C}(P_m)$.

Le nombre de ces classes est majoré par 2^{j-1} . Les autres propriétés sont évidentes.

Nous aurons enfin besoin du lemme suivant :

Lemme : soit $t (\neq 0)$ une direction de genre temps et soit π_t l'hyperplan $\{\xi \in Z \mid t \cdot \xi = 0\}$ alors :
tous les points de l'intersection de $C(P_m)$ par des hyperplans parallèles à π_t sont à une distance finie de l'origine dans $Z/L(P_m)$.

Dem. En passant à $Z/L(P_m)$ on se ramène au cas où P_m est complet. Si une section par un hyperplan parallèle à π_t a un point infini, la droite issue de l'origine et de direction ce point infini serait à la fois dans $C(P_m)$ et π_t et donc $t \notin T$.

Remarques :

1) Si $P_m(\xi)$ est elliptique, $T = Z'$.

2) Les notions de directions de genre temps et de directions d'hyperbolicité (pour les polynômes homogènes) sont distinctes ; en effet :

α) elles sont définies dans des espaces différents Z' et Z .

β) même en identifiant Z et Z' , elles ne se recoupent pas toujours, ainsi dans $Z = \mathbb{R}_3$:

i) $P_2(\xi) \equiv \alpha \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2$, $0 < \alpha$, est hyperbolique pour

$H = \{\xi \mid \alpha \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 > 0\}$ et le lieu T est donné par

$\{\xi \mid \frac{1}{\alpha} \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2 > 0\}$. Si $0 < \alpha < 1$ $T \supset H$, si $\alpha = 1$ $T = H$ et enfin

si $\alpha > 1$ $T \subset H$.

ii) $P_4(\xi) \equiv (\alpha \xi_3^2 - \xi_2^2 - \xi_1^2)(\alpha \xi_2^2 - \xi_1^2 - \xi_3^2)$, $0 < \alpha < 1$, n'est pas hyperbolique

et T est donné par :

$$T = \{\xi \mid 1/\alpha \xi_3^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2 > 0\} \cap \{\xi \mid 1/\alpha \xi_2^2 - \xi_1^2 - \xi_3^2 > 0\},$$

et de plus T a une intersection vide avec les deux cônes
 $\alpha \xi_3^2 - \xi_2^2 - \xi_1^2 \geq 0$ et $\alpha \xi_2^2 - \xi_1^2 - \xi_3^2 \geq 0$.

3) Supposons que $P_m(\xi)$ soit tel que :

$$\alpha) \quad T \neq 0.$$

$$\beta) \quad T = \Gamma^+ \cup \Gamma^-,$$

alors le bord de la fermeture $\overline{\Gamma^+ \cup \Gamma^-}$ est le cône dual (ou polaire) de $C(P_m)$ et son équation est donnée par l'équation tangentielle associée à $P_m(\xi) = 0$.

3 - Les enveloppes P-convexes

Cette partie suit alors dans une grande mesure l'exposé de Vladimirov [Vl 1].

1) Les enveloppes C-convexes

Soient $C = C^+ \cup C^-$ un cône symétrique ouvert de Z' , union de deux cônes convexes opposés C^+ et $C^- = -C^+$. Un vecteur $t \in Z'$ sera dit de genre temps si $t \in C$. Une courbe continue L sera dite de genre temps, si en tout point $l \in L$, $L \subset l + C$; si en plus elle est $C^{(1)}$, on peut donner une définition locale en demandant qu'au point l le vecteur tangent à L soit dans $l + C$.

On définit aussi une rotation d'ordre pour les couples (t_1, t_2) tels que $t_1 \in t_2 + C$. On écrit alors $t_1 > t_2$ si $t_1 \in t_2 + C^+$ et $t_1 < t_2$ si $t_1 \in t_2 + C^-$.

Def. Soient $t_1, t_2 \in Z'$ tels que $t_1 > t_2$ alors :

$$B^C(t_1, t_2) = [t_1 + C^-] \cap [t_2 + C^+],$$

$B^C(t_1, t_2)$ est un ouvert convexe de Z' .

Il résulte immédiatement de la définition que si $t_1 > t_2 > t_3 > t_4$ alors $B^C(t_1, t_4) \supset B^C(t_2, t_3)$. D'autre part $B^C(t_1, t_2)$ peut aussi se définir comme l'union de toutes les courbes continues de genre temps d'extrémités t_1 et t_2 .

Def. Soit Ω un ouvert de Z' , on appelle enveloppe C-convexe de Ω , le plus petit ensemble $B^C(\Omega)$, ouvert de Z' , qui contient Ω et tel que : si t_1 et t_2 sont dans $B^C(\Omega)$, et s'il existe une courbe de genre temps, entièrement contenue dans $B^C(\Omega)$, qui les joigne, alors :

$$B^C(t_1, t_2) \subset B^C(\Omega) \quad .$$

Définissons alors la suite croissante d'ensembles ouverts $(i)^{B^C}(\Omega)$ par :

$$(i)^{B^C}(\Omega) = \cup B^C(t_1, t_2), \quad (0)^{B^C}(\Omega) = \Omega, \quad ,$$

l'union s'effectuant sur tous les couples (t_1, t_2) appartenant à $(i-1)^{B^C}(\Omega)$ et tels qu'ils puissent être joints par une courbe de genre temps toute entière située dans $(i-1)^{B^C}(\Omega)$.

Alors
$$B^C(\Omega) = \cup_{i \geq 0} (i)^{B^C}(\Omega) \quad .$$

Def. Un ouvert Ω est dit C-régulier si $B^C(\Omega) = (1)^{B^C}(\Omega)$.

Lemme : si Ω est convexe $B^C(\Omega)$ est convexe.

Dem. Il suffit de montrer que si Ω est convexe $(1)^{B^C}(\Omega)$ est convexe. Soient x et y deux points quelconques de $(1)^{B^C}(\Omega)$, nous allons montrer que les points de la forme $\lambda x + (1 - \lambda)y$, $0 \leq \lambda \leq 1$ sont encore dans $(1)^{B^C}(\Omega)$. Nous supposons que x et y ne sont pas dans Ω ; le cas où l'un des points s'y trouve se traitant de façon identique.

D'après la définition de $(1)^{B^C}(\Omega)$, il existe dans Ω quatre points x_1, x_2 avec $x_1 > x_2$, et y_1, y_2 avec $y_1 > y_2$, tels que x soit situé

sur une courbe de genre temps d'extrémités x_1 et x_2 et y sur une courbe de genre temps d'extrémités y_1 et y_2 . D'après la convexité de Ω les points $\rho_1^\lambda = x_1 \lambda + (1-\lambda)y_1$ et $\rho_2^\lambda = \lambda x_2 + (1-\lambda)y_2$ sont dans Ω et comme C^+ est convexe $\rho_1^\lambda > \rho_2^\lambda$; enfin $B^C(\rho_1^t, \rho_2^t) \subset (1)B^C(\Omega)$. On vérifie alors sans peine que $\lambda x + (1-\lambda)y \in B^C(\rho_1^t, \rho_2^t)$.

Lemme : si Ω est convexe, Ω est C -régulier.

Dem. Il nous faut montrer que $(1)B^C(\Omega) = (2)B^C(\Omega)$. La démonstration est semblable à celle du lemme précédent. Soit $y \in (2)B^C(\Omega)$, il existe y_1 et y_2 dans $(1)B^C(\Omega)$ tels que $y_1 > y_2$ et tels que y soit situé sur une courbe de genre temps d'extrémités y_1 et y_2 . De même, il existe z_1 et z_1' , z_2 et z_2' dans Ω tels que $z_1 > z_1'$ et $z_2' > z_2$ et tels que y_1 et y_2 soient situés sur des courbes de genre temps d'extrémités respectives z_1 et z_1' , et z_2 et z_2' . Alors $z_1 > y_1 > y > y_2 > z_2$ et le lemme résulte de ce que $y \in B^C(y_1, y_2)$ et $B^C(y_1, y_2) \subset B^C(z_1, z_2)$.

2) Les enveloppes P-convexes

Soit P un polynôme ; T_P , l'ensemble des directions de genre temps (nous supposons P_m complet) va alors jouer le même rôle que C dans le paragraphe précédent. Ecrivons $T_P = (C_1 \cup -C_1) \cup \dots \cup (C_l \cup -C_l)$, on définit comme précédemment des vecteurs et des courbes de genre temps appartenant à la classe $\{i\}$ ($1 \leq i \leq l$). De même si un couple de points (t_1, t_2) est tel que $t_1 \in t_2 + T$, alors $t_1 - t_2$ est dans l'une des composantes connexes de T et donc il existe un indice j , $1 \leq j \leq l$ tel que $t_1 \in t_2 + C_j \cup -C_j$, et on peut mettre sur ces couples (t_1, t_2) une relation d'ordre.

Def. soient $t_1, t_2 \in Z'$, tels que $t_1 - t_2$ est un vecteur de genre temps appartenant à la classe $\{i\}$, et $t_1 > t_2$ alors :

$$B_P(t_1, t_2) = B^{C_i \cup -C_i}(t_1, t_2) .$$

Remarque : soient $t_1, t_2 \in Z'$, relativement de genre temps, c'est-à-dire tels que $t_1 \in t_2 + T$; s'il existe une courbe de genre temps, continue, joignant t_1 à t_2 , alors elle est de genre temps pour la classe à laquelle $t_1 - t_2$ appartient.

La définition de l'enveloppe P-convexe d'un ouvert est alors la même que celle de l'enveloppe C-convexe, en remplaçant $B^C(t_1, t_2)$ par $B_P(t_1, t_2)$.

On définit aussi comme précédemment la suite croissante d'ensembles ouverts $(i)B_P(\Omega)$ et

$$B_P(\Omega) = \bigcup_{i \geq 0} (i)B_P(\Omega) .$$

Remarque : $(1)B_P(\Omega) = \bigcup_{1 \leq j \leq l} (1)B^{C_j U - C_j}(\Omega) .$

Def. Un ouvert Ω est dit P-régulier si $B_P(\Omega) = (1)B_P(\Omega) .$

D'après la remarque précédente tout ouvert Ω , convexe, n'est pas forcément P-convexe.

Lemme : l'opération "prendre l'enveloppe P-convexe" commute aux limites inductives.

Dem. Voir V.S. Vladimirov [Vl 1].

Remarque : si P_m n'est pas complet l'ensemble du paragraphe reste inchangé excepté le fait que $B_P(t_1, t_2)$ n'est plus ouvert.

Nous allons définir une autre suite d'ensembles. Notons $B_P^i(\Omega)$ l'enveloppe C_i -convexe de Ω ; puis $B_P^{ij}(\Omega)$ l'enveloppe C_j -convexe de Ω etc...

On a évidemment que $B_P^i(\Omega) \subset B_P^{ij}(\Omega)$. Une suite de N opérations $ijk \dots$ est un mot de $[1]^N$. Un sous-mot est obtenu en omettant certaines lettres et en conservant l'ordre des autres. Soit un mot $M = ijk \dots$ et m un

sous-mot de M alors $B_P^m(\Omega) \subset B_P^M(\Omega)$. Notons $X_P(\Omega) = \bigcup_{M \in [1]^Z} B_P^M(\Omega)$; d'après la définition de $B_P(\Omega)$ on a $B_P(\Omega) \subset X_P(\Omega)$. Enfin $(1)B_P(\Omega) = \bigcup_{i \in [1]} B^i$ et on montre sans difficulté que

$$(n)B_P(\Omega) \supset \bigcup_{M \in [1]^n} B_P^M(\Omega) \quad \text{d'où} \quad X_P(\Omega) \subset B_P(\Omega)$$

et donc

$$B_P(\Omega) = \bigcup_{M \in [1]^Z} B_P^M(\Omega).$$

Donnons-nous un ordre déterminé des l opérations soit par exemple $m = 12 \dots 1$ et considérons la suite croissante d'ensemble $B_P^{m^k}(\Omega)$ où $m^k = m \dots m$ k fois répété. Soit alors M un mot de $[1]^n$ on vérifie sans peine que $B_P^{m^n}(\Omega) \supset B_P^M(\Omega)$ d'où comme m^k est un mot de $[1]^{kl}$ on a :

$$B_P(\Omega) \supset \bigcup_{k=0}^{\infty} B_P^{m^k}(\Omega).$$

Lemme : si Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}_n$ alors $B_P(\Omega)$ est convexe.

Dem. Si Ω est convexe chaque complétion donne un ouvert convexe, c'est-à-dire les $B_P^M(\Omega)$ sont convexes, donc en particulier les $B_P^{m^k}(\Omega)$. Comme $B_P(\Omega)$ est une union d'ouverts convexes croissants, $B_P(\Omega)$ est convexe.

4 - Le théorème du double cône

Dans ce qui suit nous supposons P_m complet, les résultats s'étendent aisément au cas non complet. Notre but est de montrer que toute solution, u , de l'équation homogène $P(D)u = 0$ nulle dans un ouvert Ω est nulle dans $B_P(\Omega)$. Pour cela nous allons montrer que si u est nulle dans un voisinage d'une courbe de genre temps C d'extrémités c_1 et c_2 alors elle est nulle dans $B_P(c_1, c_2)$.

L'outil essentiel pour nous sera le théorème suivant dû à L. Hörmander [Hö 1], conséquence directe du théorème de Holmgren :

Théorème : soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts convexes de $\mathbb{R}_n$ tels que $\Omega_1 \subset \Omega_2$, et soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants tel que tout plan caractéristique de P qui rencontre Ω_2 rencontre aussi Ω_1 . Alors les solutions $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ de l'équation $P(D)u = 0$, nulles dans Ω_1 , sont aussi nulles dans Ω_2 .

Un plan $t.\xi = C^{te}$ est caractéristique pour P si $P_m(\xi) = 0$.

Soit $]t_1, t_2[$ un segment de genre temps d'extrémités t_1 et t_2 , $t_1 > t_2$, soit Ω_1 un voisinage de ce segment et $\Omega_2 = \Omega_1 \cup B_P(t_1, t_2)$; on a :

Lemme : les solutions $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$ de l'équation $P(D)u = 0$ nulles dans Ω_2 .

Dem. Soit ω_1 un voisinage convexe de $]t_1, t_2[$ dans Ω_1 . Les conditions du lemme entraînent donc que u est nulle dans $\omega_1 \cap B_P(t_1, t_2)$ et il suffit de montrer que $\omega_1 \cap B_P(t_1, t_2)$ et $B_P(t_1, t_2)$ satisfont les conditions du théorème de L. Hörmander.

Par construction $\omega_1 \cap B_P(t_1, t_2)$ et $B_P(t_1, t_2)$ sont deux ouverts convexes et $\omega_1 \cap B_P(t_1, t_2) \subset B_P(t_1, t_2)$. Il nous faut donc vérifier que tout plan caractéristique rencontrant $B_P(t_1, t_2)$ rencontre $\omega_1 \cap B_P(t_1, t_2)$, ce qui résulte du lemme suivant :

Lemme : soit $]t_1, t_2[$ un segment de genre temps d'extrémités t_1 et t_2 , $t_1 > t_2$, alors tout plan caractéristique rencontrant $B_P(t_1, t_2)$, rencontre $]t_1, t_2[$.

Dem. Soit y un point de $B_P(t_1, t_2)$. Par définition y est situé sur une courbe continue de genre temps appartenant à la même classe que le segment $]t_1, t_2[$ et d'extrémités t_1 et t_2 . Sans restreindre la généralité nous pouvons supposer que cette courbe est une fois différentiable.

Soit π_y un plan caractéristique de P passant par y . π_y s'écrit $\xi \cdot (x - y) = 0$ avec $P_m(\xi) = 0$. Alors :

- 1) le vecteur t , tangent en y à la courbe de genre temps, n'est pas dans l'hyperplan π_y .

En effet, par hypothèse $t \in T$, donc si π_y n'est pas dégénéré et comme P_m est complet $t \cdot \xi \neq 0$.

2) t_1 et t_2 sont de part et d'autre de π_y . Ils ne sont pas dans π_y sans quoi $t_1 - y$ ou $y - t_2$ ne seraient pas de genre temps. Enfin la courbe ne rencontre π_y qu'en y . Supposons en effet le contraire et soit y' un autre point d'intersection, le premier rencontré par continuité à partir de y (en parcourant la courbe dans un sens déterminé). Comme nous l'avons vu en 1) le vecteur tangent en y' n'est pas dans π_y . L'arc de courbe $\widehat{yy'}$ ne rencontre donc π_y que en y et y' et en plus de façon transverse. En appliquant le théorème de Rolle, on voit aisément que ceci implique l'existence sur l'arc $\widehat{yy'}$ d'un point y'' en lequel le vecteur tangent est dans le plan π_y , ce qui est contraire à l'affirmation 1).

Par suite, le segment $]t_1, t_2[$ est rencontré par π_y .

Soit maintenant $\widehat{t_1 t_3}$ une courbe de genre temps d'extrémités t_1, t_3 , formée de l'union de deux segments $\widehat{t_1 t_3} =]t_1, t_2] \cup [t_2, t_3[$, et soit Ω_1 un voisinage de $\widehat{t_1 t_3}$, alors :

Lemme : les solutions $u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, où $\Omega_2 = \Omega_1 \cup B_P(t_1, t_3)$ de l'équation $P(D)u = 0$, nulles dans Ω_1 , sont nulles dans Ω_2 .

Dem. On voit aisément qu'il suffit de raisonner dans le plan ω_t , de dimension deux, déterminé par les points t_1, t_2 et t_3 (s'ils sont colinéaires le lemme résulte du résultat précédent). Dans ce plan la courbe $\widehat{t_1 t_3}$ est de genre temps pour un certain cône $\omega_t \cap C_i$, $C_i \subset T$. En appliquant alors un certain nombre de fois le lemme précédent nous pouvons passer de $\omega_t \cap \Omega_1$ à $\omega_t \cap (\Omega_1 \cup B_P(t_1, t_3))$. Une première complétion permet d'abord de remplacer (voir Fig. 1) $]t_1, t_2[$ et $]t_2, t_3[$ par

$B_P(t_1, t_2)$ et $B_P(t_2, t_3)$. Le point t_2 fait partie de l'ensemble complété (en fait un voisinage de t_2) puisqu'il faisait partie de l'ensemble initial. On prolonge alors le segment $t_1 t_2$ dans $B_P(t_2, t_3)$ et on complète $]t_1, x_1[$. On recommence ensuite en prenant le segment $]t_1, x_2[$, contenu dans $B_P(t_1, x_1) \cup B_P(t_2, t_3)$, le plus près possible de $]t_1 t_3[$. On vérifie sans peine qu'il existe x_n tel que $B_P(t_1, x_n) \cup B_P(t_2, t_3) \supset]t_1, t_3[$; en fait c'est un voisinage de ce segment qu'on obtient. Une dernière application du lemme donne $B_P(t_1, t_3)$.

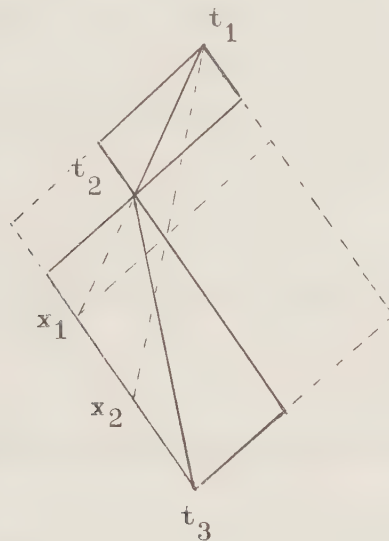


Fig. 1

Soit maintenant $\widehat{t_1 t_n}$ une courbe^{*} continue de genre temps, d'extrémités t_1 et t_n , de la forme $]t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n[$, par application répétée du lemme précédent, on voit que les solutions u nulles dans un voisinage de $\widehat{t_1 t_n}$ sont nulles dans $B_P(t_1, t_n)$. Soit alors C une courbe continue de genre temps d'extrémités t_1 et t_2 et soit Ω un voisinage de cette courbe, il est alors aisé de montrer qu'il existe une courbe continue de genre temps d'extrémités t_1 et t_2 , de la forme $]t_1 t'_1] \cup [t'_2, t'_3[\dots \cup [t'_n, t_2[$ (le nombre de segments dépendant

^{*}Dans ce qui suit, une courbe continue dans $\mathbb{R}_n$ est une application continue φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_n$. soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\varphi(\lambda_i) = t_i$, nous dirons que $\varphi(]\lambda_1, \lambda_2[)$ est une courbe continue ("ouverte") d'extrémités t_1 et t_2 .

des points t_1 et t_2 et du voisinage) et telle que Ω soit un voisinage de cette courbe. D'où :

Théorème : soit C une courbe continue de genre temps d'extrémités t_1 et t_2 , soit Ω un voisinage de C dans $\mathbb{R}_n$. Les solutions $u \in \mathcal{D}'(\Omega \cup B_P(t_1, t_2))$ de $P(D)u = 0$, nulles dans Ω , sont nulles dans $\Omega \cup B_P(t_1, t_2)$.

Remarque : grâce au lemme sur les limites inductives on peut étendre ce résultat aux cas où la courbe n'a pas une "fermeture" compacte.

Ce théorème et la définition des enveloppes P -convexes entraînent alors :

Théorème (du double cône) : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}_n$ et soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. Les solutions $u \in \mathcal{D}'(B_P(\Omega))$ de l'équation $P(D)u = 0$ qui sont nulles dans Ω , sont nulles dans $B_P(\Omega)$.

5 - Directions de genre temps et hypoellipticité partielle

Nous donnons ici la définition de l'hypoellipticité partielle d'après L. Gårding et B. Malgrange [Ga^o 1]. Auparavant nous allons introduire la notion de régularité partielle pour les distributions.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ dont nous noterons les points courants par x et y alors :

Def. Soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la distribution f sera dite régulière en x , si pour tout couple d'ouverts $V \in \mathbb{R}^m$, $W \in \mathbb{R}^n$, $V \times W \subset \Omega$ et tout couple de fonctions $\phi \in \mathcal{D}(V)$, $\varphi \in \mathcal{D}(W)$, la distribution g définie par

$$\langle g, \phi \rangle = \langle f, \varphi \phi \rangle$$

est une fonction C^∞ .

On a alors le lemme suivant ([Ga^o 1]) :

Lemme : soit $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ régulière en x dans Ω , et soit $V \times W \subset \Omega$ et $\varphi \in \mathcal{D}(W)$ alors la convolution partielle en y de f par φ que nous notons formellement

$$\int f(x, y + y') \varphi(y') dy'$$

est une fonction C^∞ en x, y pour $x \in V$ et y voisin de l'origine.

Def. Soit $P = P(D_x, D_y)$ un opérateur différentiel en x et y , P est hypoelliptique en x , ou partiellement hypoelliptique, si toute distribution u , définie dans un ouvert et solution de $P(D)u = 0$ est régulière en x .

Rappelons que P est hypoelliptique si toute solution u de $P(D)u = 0$ est une fonction C^∞ .

On caractérise (voir [Ga^o 1], [Hø 1]) algébriquement l'hypoellipticité et l'hypoellipticité partielle grâce aux deux théorèmes suivants.

Théorème 1 : pour que P soit hypoelliptique il faut et il suffit que pour :

$$|\alpha| > 0 \quad P^{(\alpha)}(\xi) / P(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}_m, \quad \xi \rightarrow \infty,$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $|\alpha| = \sum_1^m \alpha_i$ et $P^{(\alpha)}(\xi) = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha P(\xi)$,

avec $\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial \xi_m}\right)^{\alpha_m}$.

Théorème 2 : pour que P soit hypoelliptique en x , il faut et il suffit que (en notant ξ et η les variables duales de x et y) :

$$P(\xi, \eta) = P_0(\xi) + \sum P_j(\xi) Q_j(\eta), \quad j > 0,$$

avec $P_0(\xi)$ hypoelliptique et

$$\frac{P_j(\xi)}{P_0(\xi)} \rightarrow 0 \quad \text{pour } \xi \in \mathbb{R}_m, \xi \rightarrow \infty.$$

Avant d'énoncer le théorème reliant directions de genre temps et hypoellicité, nous allons faire quelques remarques sur les transformations et les distributions ([Gu 1]).

Soit R une rotation dans $\mathbb{R}_n$ et soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_n)$, nous définissons $\varphi_R(x)$ par $\varphi_R(x) = \varphi(R_x^{-1}x)$, $\varphi_R \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_n)$. Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}_n$, $\varphi_R \in \mathcal{D}(R\Omega)$. Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_n)$ on définit par dualité : $f_R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_n)$ par :

$$\langle f_R, \varphi \rangle = \langle f, \varphi_R \rangle.$$

De même si $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f_R \in \mathcal{D}'(R^{-1}\Omega)$. Enfin si f est une fonction, f_R est une fonction, et si $f \in C^\infty$, $f_R \in C^\infty$. Si $P(D)u = 0$, alors $P_R(D)u_R = 0$ avec $P_R(\xi) = P(R^{-1}\xi)$ et si t est de genre temps pour P , Rt est de genre temps pour P_R .

Soit alors $g(z) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $\tilde{g}(\xi)$ sa transformée de Fourier, posons

$$\varphi_t(x) = \int e^{i\xi \cdot x} \tilde{g}(t \cdot \xi) d^n \xi.$$

Lemme : soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, soit P_m sa partie principale alors :
si $P_m(\xi)$ est complet et s'il existe une direction de genre temps t , pour tout $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}_n$, tel que $P(D)u = 0$, et pour tout $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $u * \varphi_t$ est une fonction indéfiniment différentiable.

Dem. 1) Vérifions d'abord que le produit de composition $u * \varphi_t$ a un sens. Il suffit de vérifier que φ_t est à support compact. Supposons par exemple que la première composante de t , t_1 , soit différente de zéro ; un calcul élémentaire montre que

$$\varphi_t(x) = (2\pi)^n t_1^{n-2} g(x_1/t_1) \prod_{j=2}^n \delta(x_j t_1 - x_1 t_j),$$

et comme g est à support compact, φ_t l'est aussi.

2) Soit R_t une rotation dans $Z' = \mathbb{R}_n$ telle que $R_t t$ soit de la forme $\tau = (\tau, 0, \dots, 0)$. τ est une direction de genre temps pour le polynôme transformé P_{R_t} qui bien entendu est de partie principale complète si P_m l'était. Il nous faut donc montrer que $u_{R^* \varphi_t, R_t}$ est C^∞ . Or φ_{t, R_t} est de la forme $\varphi_{t, R_t} = (2\pi)^{\frac{1}{\tau}} g(x_1/\tau) \frac{n}{2} \delta(x_j)$.

Nous devons donc montrer que u_R convolé avec une fonction à support compact en x , est C^∞ , c'est-à-dire que u_R est régulière en $x_2, \dots, x_n$. Nous devons donc vérifier que P_R est hypoelliptique en $x_2, \dots, x_n$.

3) Soit donc $P(\xi)$ un polynôme (nous omettons l'indice R) et $\tau = (\tau, 0, \dots, 0)$ une direction de genre temps. Ceci veut dire que le système

$$\begin{cases} P_m(\xi) = 0 \\ \tau \cdot \xi = 0 \end{cases}$$

n'a de solutions réelles que $\xi \equiv 0$. Or $\tau \cdot \xi = \tau \xi_1$ donc il faut que $P_m(\xi) \Big|_{\xi_1=0} = 0 \Rightarrow \xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_n = 0$. Ceci signifie donc que

$P_m(\xi) \Big|_{\xi_1=0}$ n'a pas de zéros réels en dehors de l'origine. On vérifie alors sans peine que $P_m(\xi) \Big|_{\xi_1=0}$ est hypoelliptique (en fait elliptique). Vérifions alors les conditions du théorème 2.

Ecrivons

$$P(\xi) = P(\xi) \Big|_{\xi_1=0} + \sum_{j>0} P_j(\xi) (\xi_1)^j,$$

où les polynômes $P_j(\xi)$ ne dépendent pas de ξ_1 .

De même

$$P(\xi) \Big|_{\xi_1=0} = P_m(\xi) \Big|_{\xi_1=0} + Q(\xi),$$

où $Q(\xi)$ est un polynôme ne dépendant pas de ξ_1 et de degré strictement inférieur à m . Comme $P_m(\xi) \Big|_{\xi_1=0}$ est différent de zéro pour

$(\xi_2, \dots, \xi_n) \neq 0$, $P(\xi) \Big|_{\xi_1=0}$ est hypoelliptique. De plus le degré des polynômes $P_j(\xi)$ est au plus égal à $m-1$, donc $\frac{P_j(\xi)}{P(\xi)} \Big|_{\xi_1=0} \rightarrow 0$ quand $(\xi_2, \dots, \xi_n)$ réel tend vers l'infini.

Remarque : on peut dire que $P(D)$ est hypoelliptique par rapport à un hyperplan orthogonal à t .

Nous allons dans ce qui suit donner des conditions d'hypoellipticité par rapport à une variable.

D'après le théorème 2 on a le lemme suivant :

Lemme : pour qu'un opérateur différentiel $P(D)$ soit hypoelliptique en x_1 (ou en ξ_1) il faut et il suffit que le terme de plus haut degré en ξ_1 dans $P(\xi)$ ne dépende pas des autres variables.

Soit $t \in \mathbb{Z}'$, $t \neq 0$, $|t| = 1$ et soit $R = R(t)$ la rotation qui amène t sur le vecteur $(1, 0, \dots, 0)$.

Def. On dira que P est hypoelliptique par rapport à la direction t si le polynôme transformé P_R est hypoelliptique en ξ_1 .

Remarque : cette définition ne dépend pas du choix particulier joué par la coordonnée ξ_1 . Il suffit pour cela de vérifier que l'hypoellipticité par rapport à ξ_i c'est-à-dire par rapport à la direction $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ équivaut à l'hypoellipticité de P_R en ξ_1 où R est la rotation qui amène $(0, \dots, 1, \dots, 0)$ sur $(1, 0, \dots, 0)$.

Soit donc $t \in \mathbb{Z}'$ et $R(t)$ la rotation associée ; on définit $e_j = R^{-1}(t) \varepsilon_j$ où ε_j est le vecteur unitaire sur le j -ième axe de coordonnée ; et soit $g(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n-1})$.

On définit alors $f_t(x) = \int \tilde{g}(e_2 \cdot \xi, e_3 \cdot \xi, \dots, e_n \cdot \xi) e^{i\xi \cdot x} d^n \xi$ où $\tilde{g}(z_1, \dots, z_{n-1})$ est la transformée de Fourier de $g(x)$.

Lemme : soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants et supposons que P soit hypoelliptique par rapport à la direction t , alors, pour toute solution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}_n$, de $P(D)u = 0$ et pour toute fonction $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n-1})$ on a :

$$u * f_t \in C^\infty(\mathbb{R}_n).$$

Dem. La démonstration de ce lemme est semblable à celle du premier lemme de ce paragraphe.

Ce lemme a pour conséquence l'existence des restrictions, au sens des distributions, des solutions u sur les "hyperplans" $t \cdot x = C^{te}$.

On peut relier ces propriétés d'hypoellipticité à l'existence de vecteurs de genre temps.

Lemme : soit $P(D)$ un opérateur différentiel et soit P_m sa partie principale. Si P_m est complet et si $P_m(\xi) = \sum_{0 \leq \alpha \leq m} C_\alpha \xi_1^\alpha Q_\alpha(\xi_2, \dots, \xi_n)$ avec

- 1) les polynômes Q_α sont homogènes et $\deg Q_\alpha = m - \alpha$;
- 2) les C_α sont des constantes et $C_0 \neq 0$, $C_m \neq 0$;
- 3) Q_0 est elliptique, c'est-à-dire $Q_0(\xi_2, \dots, \xi_n) = 0 \Rightarrow \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$;

alors

- a) $P(D)$ est hypoelliptique par rapport à la direction $(1, 0, \dots, 0)$;
- b) la direction $(1, 0, \dots, 0)$ est une direction de genre temps.

Dem. a) L'hypoellipticité résulte de ce que le terme de degré le plus élevé en ξ_1 dans $P(\xi)$ est ξ_1^m puisque $C_m \neq 0$.

b) $(1, 0, \dots, 0)$ est une direction de genre temps si $P_m(\xi) = 0$ et $(1, 0, \dots, 0) \cdot \xi = 0$ impliquent $\xi \equiv 0$ puisque P_m est complet. Donc

il faut que $P_m(\xi) \Big|_{\xi_1=0}$ ne s'annule que pour $\xi_2 = \dots = \xi_n = 0$;
c'est bien le cas puisque $P_m(\xi) \Big|_{\xi_1=0} = C_0 Q_0(\xi_2, \dots, \xi_n)$.

Application à l'équation d'onde

Considérons $P(D) = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ et le polynôme

associé $P(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 - \dots - \xi_n^2$.

$P(D)$ est hypoelliptique relativement à $(\xi_2, \dots, \xi_n)$ et à ξ_1 . D'après les généralisations que nous avons obtenues, $P(D)$ est hypoelliptique par rapport à toutes les directions t et tous les hyperplans orthogonaux à t , les t étant tels que $P(t) > 0$.

II . LA METHODE ANALYTIQUE

=====

Nous nous proposons dans cette deuxième partie d'être succinct. En effet, la possibilité d'obtenir certaines propriétés des solutions d'équations aux dérivées partielles à l'aide de la théorie des fonctions analytiques était connue de J. Bros, H. Epstein, V. Glaser et les principaux résultats ont été publiés dans le livre de V.S. Vladimirov ([Vl 1]). Si nous les exposons à nouveau c'est pour mieux mettre en évidence les avantages ou les inconvénients de l'une ou l'autre de ces méthodes.

1 - La position du problème

Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, soit P_m la partie principale du polynôme associé P . Nous supposons que P_m est complet et qu'il existe une direction de genre temps t . D'après ce que nous avons vu dans la première partie le cône $\dot{C}(P_m)$ est décomposé en $2q$ cônes $\dot{C}_i^+$ et $\dot{C}_i^-$, les cônes $\dot{C}_i^+$ étant, par exemple, dans le demi-espace $t.\xi > 0$. Dénotons par C_t^+ l'enveloppe convexe de l'union $\bigcup_i C_i^+$, $\dot{C}_t^+$ est encore dans le demi-espace $t.\xi > 0$. On construit

de même un cône C_t^- tel que $C_t^+ = -C_t^-$. Soit $C_t = C_t^+ \cup C_t^-$, les directions de genre temps de la classe de t , sont des directions de genre temps pour le cône C_t , et on pose par définition :

Def. Un polynôme P (ou un opérateur différentiel) appartient à la classe $\mathcal{P}$ s'il existe un vecteur $a \in C_t^+$ tel que :

$$\{\xi \in \mathbb{Z} \mid P(\xi) = 0\} \subset \{a + C_t^-\} \cup \{-a + C_t^+\},$$

C_t^+ étant défini par la construction précédente.

Nous généralisons cette définition de la façon suivante :

Def. Un polynôme P appartient à la classe $\mathcal{P}'$ s'il existe :

- 1) un cône convexe fermé C^+ tel que $C^+ \cap -C^+ = \{0\}$;
- 2) un vecteur $a \in C^+$

tels que :

$$\{\xi \in \mathbb{Z} \mid P(\xi) = 0\} \subset \{a - C^+\} \cup \{-a + C^+\}.$$

Cette dernière définition ne fait plus intervenir la notion de direction de genre temps relativement à un polynôme.

Nous dirons qu'une distribution tempérée f est dans la classe $L(a; C^+)$ si on a pour sa transformée de Fourier $\tilde{f}$ la propriété de support suivante :

$$\text{supp } \tilde{f} \subset \{a - C^+\} \cup \{-a + C^+\}.$$

Considérons alors l'équation différentielle $P(D)u = f$, où $P \in \mathcal{P}'$ et $f \in L(a; C^+)$, le cône C^+ étant le cône associé à P dans la définition de la classe $\mathcal{P}'$. En transformée de Fourier cette équation s'écrit $P(\xi)\tilde{u}(\xi) = \tilde{f}(\xi)$ (nous supposons que $u \in \mathcal{S}'$), et d'après les conditions sur P et sur f on voit que $\text{supp } \tilde{u} \subset \{a - C^+\} \cup \{-a + C^+\}$, donc que $u \in L(a; C^+)$.

Nous allons maintenant caractériser les éléments de $L(a; C^+)$.

Le cône C^+ étant convexe est un ensemble régulier^{*} ; de même $\{a - C\} \cup \{-a + C^+\}$ est un ensemble régulier. Soit alors $f \in L(a; C^+)$, on peut décomposer $\tilde{f}$ comme différence $\tilde{f}^+ - \tilde{f}^-$ de deux distributions tempérées dont le support est contenu respectivement dans $\{-a + C^+\}$ et $\{a - C^+\}$ (voir Chapitre II ou directement le théorème XXXIV de L. Schwartz, [Sc 1]). Avec la définition de la transformée de Fourier que nous avons donnée dans la première partie on voit (voir pour démonstration correcte [St 1], [Ep 1], [Vl 1]) que $\tilde{f}^+(z) = \langle \tilde{f}^+(\xi), e^{i\xi \cdot z} \rangle$ est, pour $\text{Im } z \in V^+$, une fonction analytique. Le cône convexe ouvert V^+ est le dual de C^+ :

$$V^+ = \{x \in Z' \mid x \cdot C^+ > 0\} = (C^+)^*.$$

En notant par $T^+ = \{z \in \mathbb{C}_n \mid \text{Im } z \in V^+\}$, nous avons donc l'analyticité de $f^+(z)$ dans le tube T^+ . On peut d'autre part montrer que :

- 1) $\tilde{f}^+(\xi) e^{-\xi \cdot \text{Im } z} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$ quelque soit $\text{Im } z \in V^+$;
- 2) $f^+(z)$ est la transformée de Fourier de $\tilde{f}^+(\xi) e^{-\xi \cdot \text{Im } z}$.
- 3) $f^+(z)$ admet une valeur au bord, c'est-à-dire que $\int f^+(x + i \text{Im } z) \varphi(x) dx$, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, définit, lorsque $\text{Im } z \rightarrow 0$ en restant à l'intérieur d'un cône quelconque contenu dans V^+ , et indépendamment de ce cône, une distribution de $\mathcal{S}'$. Enfin cette valeur au bord est la distribution tempérée f^+ , transformée de Fourier de $\tilde{f}^+$.

Lemme : Tout élément f de $L(a; C^+)$ s'écrit comme différence des valeurs au bord $f^+ - f^-$ de deux fonctions $f^+(z)$ et $f^-(z)$ analytique dans les tubes T^+ et T^- . Cette décomposition est unique à une fonction entière près.

Dem. La première partie du lemme résulte de ce que nous avons dit précédemment.

* Cette notion d'ensemble régulier sera définie dans le Chapitre II.

La deuxième partie provient de ce que la décomposition de $\tilde{f}$ en $\tilde{f}^+$ et $\tilde{f}^-$ n'est pas unique ([Sc 1]) dans la région où les supports de $\tilde{f}^+$ et $\tilde{f}^-$ coïncident, c'est-à-dire dans $\{a - C^+\} \cap \{-a + C^+\}$; l'arbitraire est donc une distribution dont le support est contenu dans $\{a - C^+\} \cap \{-a + C^+\}$, qui est une région compacte, et donc la transformée de Fourier de cette distribution est une fonction analytique entière.

Si nous revenons au système $P(D)u = f$, $P \in \mathcal{P}'$ et $f \in L(a; C^+)$, nous voyons que puisque $u \in L(a; C^+)$, u s'écrit comme différence des valeurs au bord de deux fonctions analytiques. Si en plus u s'annule dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}_n$, comme les valeurs au bord coïncident sur Ω , on obtient u comme différence des valeurs au bord d'une même fonction analytique. On va alors se servir de ce résultat pour agrandir la région de nullité Ω .

2 - Le théorème du double cône

Soient $P \in \mathcal{P}'$, $f \in L(a; C^+)$ et $u \in \mathcal{G}'$ une solution de $P(D)u = f$ qui s'annule dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}_n$. D'après le lemme du paragraphe précédent u s'écrit comme différence des valeurs au bord de deux fonctions analytiques dans les tubes T^+ et T^- .

Puisque $u = 0$ dans Ω , ces valeurs au bord coïncident, au sens des distributions, sur Ω . D'après le "théorème de l'Edge of the Wedge" ([Ep 2], [V1 1], [Bo 1], [Bw 1]), il existe une fonction $f(z)$ analytique dans $T^+ \cup T^- \cup v(\Omega)$ où $v(\Omega)$ est un voisinage complexe de Ω et dont la différence des valeurs au bord, selon qu'elles sont prises à partir du tube T^+ ou du tube T^- , coïncide avec u . Cette fonction analytique est unique à une fonction entière près, transformée de Fourier-Laplace d'une distribution arbitraire dont le support est dans $\{a - C^+\} \cap \{-a + C^+\}$.

Comme d'autre part $T^+ \cup T^- \cup v(\Omega)$ n'est pas un domaine d'holomorphic, on agrandit la région d'analyticité de $f(z)$ en passant à l'enveloppe d'holomorphic $H(T^+ \cup T^- \cup v(\Omega))$. Par suite la fonction $f(z)$ est analytique sur la partie réelle de cette enveloppe, $\text{Re } H(T^+ \cup T^- \cup v(\Omega))$, qui contient Ω et qui donc consiste en un agrandissement de la région de coïncidence.

Nous allons montrer maintenant que si Ω contient un voisinage d'une courbe de genre temps relativement au cône V , $V = V^+ \cup -V^+$, alors la solution u s'annule dans l'union de Ω et du double cône s'appuyant sur les extrémités de cette courbe. La solution u s'annule alors dans l'enveloppe V -convexe de Ω : $B^V(\Omega)$.

Comme dans la première partie, il nous suffit de montrer ce résultat lorsque la courbe de genre temps se réduit à un segment.

Lemme : soit V un cône ouvert, union de deux cônes convexes V^+ et V^- , $V^+ = -V^-$ et soit $f(z)$ une fonction analytique dans les tubes T^+ et T^- et dans un voisinage réel d'un segment de genre temps (relativement à V) d'extrémités t_1 et t_2 . Alors $f(z)$ est analytique (et uniforme) dans le domaine $T^+ \cup T^- \cup v(B^V(t_1, t_2))$ où $v(B^V(t_1, t_2))$ est un voisinage complexe de $B^V(t_1, t_2)$.

Dem. En fait ce lemme est de nature locale et il suffit que $f(z)$ soit analytique dans les tubes T_R^+ et T_R^- où $T_R^\pm = \{z \in \mathbb{C}_n \mid \text{Im } z \in V^\pm \cap U(0, R)\}$, $U(0, R)$ étant une boule ouverte de $\mathbb{R}_n$, centrée à l'origine et de rayon R .

Nous n'allons qu'esquisser la démonstration de ce lemme, en particulier nous ne précisons pas la nature du voisinage de $B^V(t_1, t_2)$. On se ramène d'abord à un problème à deux dimensions. Considérons en effet un plan analytique réel à deux dimensions, π , passant par le segment. Il coupe les tubes T^+ et T^- selon des tubes T'^+ et T'^- de bases $\text{Im } \pi \cap V^\pm$. Les cônes $\text{Im } \pi \cap V^\pm$ sont des ouverts dans $\text{Im } \pi$, puisque ce plan passe par l'origine et contient une direction de genre temps. D'autre part l'intersection du voisinage réel est un voisinage dans $\text{Re } \pi$ du segment et enfin $f(z)|_\pi$ est analytique dans $T'^+ \cup T'^-$ et dans un voisinage à deux dimensions du segment de genre temps d'extrémités t_1 et t_2 . Il nous suffit alors de montrer que $f(z)|_\pi$ est analytique dans $T'^+ \cup T'^- \cup v(B^{V \cap \text{Im } \pi}(t_1, t_2))$.

Nous pouvons toujours supposer, moyennant des transformations biholomorphes des coordonnées, que $V = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}_2 \mid y_1^2 - y_2^2 > 0\}$ et que le segment soit de la forme $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_2 \mid x_2 = 0, |x_1| \leq 1\}$.

Nous allons montrer en utilisant le théorème du disque ([Bm 1], [Br 3]) que, étant donné les hypothèses ci-dessus, $f(z)|_{\pi}$ est analytique dans $\{(x_1 - 1)^2 > x_2^2, x_1 < 1\} \cap \{(x_1 + 1)^2 > x_2^2, x_1 > -1\}$. Pour cela remarquons que les courbes L_{λ}

$$\begin{cases} \sqrt{1+\lambda^2} - x_2 = \lambda \operatorname{ch} \varphi \\ x_1 = \lambda \operatorname{sh} \varphi \end{cases} \quad |\varphi| < \varphi_{\lambda}, \quad \operatorname{sh} \varphi_{\lambda} = \frac{1}{\lambda},$$

remplissent pour $+\infty \geq \lambda \geq 0$ le moitié du double cône. Puisque $f|_{\pi} = g$ est analytique dans un voisinage du segment, il existe $\lambda_0 \neq \infty$ tels que pour $\lambda \geq \lambda_0$, g soit analytique sur L_{λ} . Supposons alors que g ne soit pas analytique dans tout ce demi double cône, ceci veut dire qu'il existe $\lambda_1 > 0$, $\lambda_0 \geq \lambda_1$, tel que g soit analytique sur L_{λ} , $\lambda > \lambda_1$ et possède au moins un point singulier sur L_{λ_1} .

Considérons alors la famille de disque

$$D(\lambda) = \left\{ \begin{array}{l} (z_1, z_2) \in \mathbb{D}_2 \mid z_2 = \sqrt{1+\lambda^2} - \lambda \operatorname{ch} \varphi \quad |\operatorname{Re} \varphi| \leq \varphi_1 \\ z_1 = \lambda \operatorname{sh} \varphi \quad |\operatorname{Im} \varphi| \leq \pi/2 \end{array} \right\}$$

pour $\lambda'_0 \geq \lambda \geq \lambda_1$, où $\lambda'_0 > \lambda_0$ est fini. Nous allons voir que g est analytique sur les disques $D(\lambda)$, $\lambda'_0 \geq \lambda > \lambda_1$ et sur la frontière $\partial D(\lambda_1)$ du disque limite. D'après le théorème du disque, comme les $D(\lambda)$ dépendent continûment de λ , g est analytique sur le disque limite $D(\lambda_1)$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Un argument semblable, avec les modifications nécessaires, pour l'autre moitié du double cône achèvera la démonstration du théorème. Montrons l'analyticité de g sur les disques $D(\lambda)$, $\lambda > \lambda_1$ et sur $\partial D(\lambda_1)$.

Considérons $\operatorname{Im} z_1$ et $\operatorname{Im} z_2$

$$y_1 = \operatorname{Im} z_1 = \lambda \operatorname{ch} (\operatorname{Re} \varphi) \sin (\operatorname{Im} \varphi)$$

$$y_2 = \operatorname{Im} z_2 = \lambda \operatorname{sh} (\operatorname{Re} \varphi) \sin (\operatorname{Im} \varphi)$$

on a donc pour $0 < |\operatorname{Im} \varphi| \leq \pi/2$, $\operatorname{Im} z_1 \neq 0$ et

$$(\operatorname{Im} z_1)^2 - (\operatorname{Im} z_2)^2 = \lambda^2 \sin^2(\operatorname{Im} \varphi) > 0, \quad \lambda'_0 \geq \lambda \geq \lambda_1.$$

Les points imaginaires des disques sont donc dans les bases des tubes T'^+ et T'^- et par conséquent g est analytique en ces points. Comme par construction g est analytique sur les courbes L_λ $\lambda'_0 \geq \lambda \geq \lambda_1$ qui correspondent à $\operatorname{Im} \varphi = 0$, g est analytique dans $D(\lambda)$, $\lambda'_0 \geq \lambda \geq \lambda_1$. D'autre part en dehors des points complexes de $\partial D(\lambda_1)$ en lesquels g est analytique, la frontière de $D(\lambda_1)$ se compose des deux points réels $(1,0)$ et $(-1,0)$ en lesquels g est aussi analytique par hypothèse, ce qui achève la démonstration de l'analyticité. L'uniformité résulte de ce que $T'^+ \cup T'^- \cup \nu(B^{\vee \operatorname{Im} z}(t_1, t_2))$ est simplement connexe, car on applique alors le théorème de monodromie.

Nous allons achever ce paragraphe par une série de remarques sur la généralité du résultat obtenu.

1) Nous sommes partis d'un polynôme $P \in \mathcal{P}'$, donc de l'existence d'un cône convexe fermé C^+ satisfaisant aux propriétés impliquées par la définition de la classe $\mathcal{P}'$. De là nous avons obtenu une complétion relativement au dual de C^+ . S'il existe d'autres cônes C'^+ , C''^+ ... vérifiant ces propriétés, on peut évidemment compléter relativement aux cônes duaux et construire ainsi une enveloppe saturée par rapport à toutes ces complétions.

2) Si $P \in \mathcal{P}$ quelque soit la classe de directions de genre temps, la construction précédente montre que Ω s'agrandit en $B_P(\Omega)$.

3) Dans les cas où les résultats de la première et de la deuxième méthode sont comparables :

α) par la première méthode, les résultats sont vrais pour des solutions $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, alors que la deuxième méthode est limitée au cas tempéré.

β) Pour les solutions tempérées, la méthode analytique s'applique aussi bien au cas inhomogène qu'au cas homogène et même à des équations aux différences finies ou à des équations intégrales.

3 - Les propriétés d'hypoellipticité

Soit C^+ un cône convexe fermé de $\mathbb{R}_n$, tel que $C^+ \cap -C^+ = \{0\}$.

Lemme : il existe un hyperplan passant par l'origine et ne rencontrant C^+ qu'à l'origine.

Dem. On raisonne par récurrence sur la dimension de n . Pour $n = 2$, c'est évident ; pour n on prend un hyperplan π quelconque passant par l'origine. Supposons, sans cela la démonstration est achevée, qu'il coupe C^+ . L'intersection $\pi \cap C^+$ est un cône convexe fermé et de plus $(\pi \cap C^+) \cap -(\pi \cap C^+) = \{0\}$ donc il existe dans π un $(n-2)$ -plan $\tilde{\pi}$ qui ne rencontre pas $\pi \cap C^+$. Considérons alors la famille à 1 paramètre des $(n-1)$ -plan $P_{\tilde{\pi}}$ passant par $\tilde{\pi}$. Le plan π fait partie de cette famille. Puisque C^+ est convexe, les normales aux plans $P_{\tilde{\pi}}$ rencontrant C^+ ne peuvent pas décrire dans le 2-plan orthogonal à $\tilde{\pi}$ un cône d'ouverture supérieure à 180° (le lieu des normales est connexe puisque C^+ est convexe donc connexe). Puisque $C^+ \cap -C^+ = \{0\}$, cette ouverture est strictement inférieure à 180° . D'où l'existence dans le 2-plan orthogonal à $\tilde{\pi}$ d'une droite ne rencontrant pas C^+ et par conséquent le plan s'appuyant sur cette droite et sur $\tilde{\pi}$ ne rencontre pas C^+ .

Il existe donc un vecteur $t \in \mathbb{R}_n$ tel que $t \cdot \xi = 0$ et $\xi \in C = C^+ \cup -C^+$ entraîne $\xi \equiv 0$.

Le vecteur t est de genre temps par rapport au dual de C^+ , et tout plan $t \cdot \xi = C^{te}$ coupe C selon un compact.

Soit maintenant $g \in \mathcal{G}(\mathbb{R})$ et $\tilde{g}$ sa transformée de Fourier, posons $\tilde{\varphi}(\xi) = \tilde{g}(t \cdot \xi)$ et soit $\varphi(x)$ la transformée de Fourier $\tilde{\varphi}(\xi)$.

Lemme : soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficient constant tel que $P \in \mathcal{P}'$; soit $f \in L(a; C^+)$ alors pour toute solution $u \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}_n)$ de l'équation $P(D)u = f$ on a que

$u * \varphi$ est une fonction indéfiniment différentiable.

Dem. Puisque $u * \varphi$ est C^∞ , $u * \varphi \in \theta_M$ (les fonctions C^∞ à croissance lente) et il nous suffit donc de montrer que $\tilde{u} \tilde{\varphi} \in \theta_{C^1}$. Or une distribution T appartient à θ_{C^1} (voir L. Schwartz [Sc 1]) si quelque soit k $(1 + |\xi|^2)^{k/2} T$ est une distribution bornée. D'après la propriété de support de $\tilde{u}$ et puisque $\tilde{u} \in \mathcal{S}'$, il existe $p, p \geq 0$ tel que $\tilde{u}(1 + (t.\xi)^2)^{-p/2}$ soit une distribution bornée et bien entendu $(1 + (t.\xi)^2)^{p/2} \tilde{\varphi} \in \mathcal{S}$ (quelque soit p). Comme si T est une distribution bornée et si $\varphi \in \mathcal{S}$, $T\varphi$ est une distribution bornée, on voit que $(1 + |\xi|^2)^{k/2} \tilde{u} \tilde{\varphi}$ est une distribution bornée, il suffit en effet de l'écrire :

$$[(1 + |\xi|^2)^{k/2} (1 + (t.\xi)^2)^{-(p+k)/2} \tilde{u}][1 + (t.\xi)^2]^{(p+k)/2} \tilde{\varphi}]$$

où le premier crochet est une distribution bornée puisque le support de $\tilde{u}$ est compact sur les plans $t.\xi = C^{te}$.

Si nous ne nous intéressons qu'aux solutions tempérées de l'équation homogène, on obtient lorsque la partie principale est complète et qu'il existe une direction de genre temps t un théorème identique à celui de la première partie sur l'hypoellipticité par rapport à un hyperplan orthogonal à t , la régularisation s'effectuant avec des éléments de $\mathcal{S}$. Ce résultat s'obtient par une démonstration semblable à celle du lemme précédent car les plans $t.\xi = C^{te}$ rencontrent le support de la solution, c'est-à-dire la variété $P(\xi) = 0$, $\xi \in \mathbb{R}_n$, en des points à distance finie.

D'une façon générale, on voit que les propriétés d'hypoellipticité partielle exposées dans la première partie sont, dans ce cadre, équivalentes au fait suivant : il suffit de multiplier la solution transformée de Fourier $\tilde{u}$ par un élément dans $\mathcal{S}$ pour les directions où le support essentiel* de $\tilde{u}$ est différent de zéro. Ce n'est donc uniquement qu'une question de support. En particulier on retrouve le

* Le support essentiel d'une distribution tempérée est l'ensemble des directions où elle ne décroît pas plus vite que n'importe quel polynôme.

deuxième résultat sur l'hypoellipticité en prenant $f = 0$ de façon à ce que le support de $\tilde{u}$ soit une hypersurface algébrique et non un cône plein.

II - HYPERBOLICITE ET EQUATION D'ONDE

Dans la première partie de ce chapitre nous exposons de manière générale la notion d'hyperbolicité et ses conséquences. En particulier nous donnons un théorème d'existence et d'unicité pour le problème de Cauchy non caractéristique. La deuxième partie voit l'application de ces résultats à l'équation d'onde dans le cas des solutions tempérées. On donne aussi une représentation intégrale des solutions tempérées de l'équation homogène, représentation qui jouera un rôle essentiel dans le chapitre suivant.

I . HYPERBOLICITE ET PROBLEME DE CAUCHY

1 - Hyperbolicité

Soit $P(\xi)$, $\xi \in Z (= \mathbb{R}_n)$, un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$, et soit $P_m(\xi)$ sa partie principale.

Def. Le polynôme $P(\xi)$ est hyperbolique par rapport à θ , $\theta \in Z$ si :

$\alpha)$ $P_m(\theta) \neq 0$.

$\beta)$ Il existe $\tau_0, \tau_0 \in \mathbb{R}$, tel que :

$$P(\xi + i\tau\theta) \neq 0 \quad \text{quelques soient } \xi \in Z \text{ et } \tau < \tau_0.$$

Il résulte de cette définition que si $P(\xi)$ est hyperbolique par rapport à θ , $P_m(\xi)$ est aussi hyperbolique par rapport à θ .

Soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants et soit $P(\xi)$ le polynôme correspondant.

Def. L'opérateur $P(D)$ est hyperbolique si le polynôme associé est hyperbolique.

Lemme ([H8 1]) : un polynôme homogène $P(\xi)$ est hyperbolique par rapport à θ si et seulement si $P(\theta) \neq 0$ et l'équation $P(\xi + \tau \theta) = 0$ n'a pas, pour ξ réel, que des racines réelles.

On voit alors que le polynôme $P(\xi)/P(\theta)$ est à coefficients réels.

Soit $P(\xi)$ un polynôme hyperbolique homogène de degré m . Il est généralement faux qu'un polynôme $P(\xi)$ admettant $P_m(\xi)$ comme partie principale soit hyperbolique. Nous énonçons le lemme suivant dû à L. Hörmander [H8 1].

Lemme : une condition nécessaire et suffisante pour que tout polynôme P de partie principale P_m soit hyperbolique est :

$$\alpha) \quad P_m(\theta) \neq 0 \quad .$$

$$\beta) \quad P_m(\xi + \tau \theta) = 0 \quad \text{n'a que des zéros réels simples quelque soit } \xi \text{ réel différent de } \theta.$$

Exemple : soit $P_2(D) = \square_n$; on a donc $P_2(\xi) = \xi_0^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_{n-1}^2$. Le polynôme P_2 vérifie les conditions $\alpha)$ et $\beta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_0^2 - \theta_1^2 - \dots - \theta_{n-1}^2 > 0$. Soit $V = \{\theta \in \mathbb{Z} \mid \theta_0^2 - \theta_1^2 - \dots - \theta_{n-1}^2 > 0\}$ et soit $Q(\xi)$ un polynôme quelconque de degré inférieur ou égal à 1, le lemme signifie donc que $P(D) = \square_n + Q(D)$ est hyperbolique par rapport à $\theta \in V$.

Def. Soit P un polynôme hyperbolique par rapport à θ , et soit P_m sa partie principale, on désigne par $\Gamma(P, \theta)$ la composante connexe de θ dans l'ouvert $\{\xi \mid P_m(\xi) \neq 0\}$.

Le cône $\Gamma(P, \theta)$ a les propriétés suivantes :

- 1) $\Gamma(P, \theta)$ est convexe.
- 2) si $\eta \in \Gamma(P, \theta)$, $P_m(\eta + \tau \theta)$ n'a que des zéros négatifs en τ .
- 3) si P est hyperbolique par rapport à θ , alors P est hyperbolique par rapport à tout η dans $\Gamma(P, \theta)$.

Def. On désigne par $\Gamma^*(P, \theta)$ le cône convexe de Z' défini par :

$$\Gamma^*(P, \theta) = \{t \in Z' \mid t \cdot \xi \geq 0, \xi \in \Gamma(P, \theta)\}.$$

Remarque importante

On appelle souvent "direction de genre temps" (voir [Co 1]) les vecteurs contenus dans l'intérieur du cône $\Gamma^* \cup -\Gamma^*$. Cette notion particulière aux équations hyperboliques n'est généralement pas équivalente à la définition donnée au chapitre I. Ainsi le polynôme $P_3(\xi) = \xi_0(\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2)$ n'a pas de direction de genre temps au sens du chapitre précédent alors que le cône $\Gamma^* \cup -\Gamma^*$ est donné par $\{t \in \mathbb{R}_3 \mid t_0^2 - t_1^2 - t_2^2 \geq 0\}$ et son intérieur par $\{t \in \mathbb{R}_3 \mid t_0^2 - t_1^2 - t_2^2 > 0\}$.

Cependant pour les polynômes du second degré les deux définitions coïncident. Enfin pour les polynômes hyperboliques de degré plus élevé, si le cône $P_m(\xi) = 0$ est formé de plusieurs feuillets emboîtés, le lieu T_P des directions de genre temps est, s'il est non vide, contenu dans l'intérieur de $\Gamma^* \cup -\Gamma^*$.

Exemple : dans le cas de l'équation d'onde $\Gamma^* \cup -\Gamma^*$ et T coïncident et coïncident même avec $\Gamma \cup -\Gamma$ si on identifie l'espace et son dual. Nous noterons dorénavant $V = V^+ \cup V^-$ avec $V^+ = \{\theta \mid \theta_0^2 - \theta_1^2 - \dots - \theta_{n-1}^2 > 0, \theta_0 > 0\}$ et $V^- = -V^+$. La fermeture $\bar{V}$ de V est donnée par $\{\theta \mid \theta_0^2 - \theta_1^2 - \dots - \theta_{n-1}^2 \geq 0\}$. On identifiera $\bar{V}^+$ avec le dual V^{+*} de V^+ .

De façon identique, il est d'usage courant ([Co 1]) de dire qu'un élément de surface est de "genre espace" en un point N si la normale à cet élément de surface N est contenue dans le cône $N + \Gamma \cup -\Gamma$. Comme pour l'équation d'onde $\Gamma \cup -\Gamma = V$, un élément de surface est de "genre espace" en N si la normale en ce point est une direction de genre temps.

Nous donnons sans démonstration le théorème suivant sur l'existence de solutions distributions dans le cas non homogène.

Théorème 1 ([H8 1] : soit $P(D)$ un opérateur différentiel à coefficients constants, hyperbolique par rapport à θ ; soit le demi-espace $H = \{x \in \mathbb{R}_n \mid \theta \cdot x \geq 0\}$; soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_n)$ tel que $\text{supp } f \subset H$ alors :

- 1) Il existe une et une seule solution fondamentale E de l'opérateur $P(D)$ telle que $\text{supp } E \subset H$. De plus $\text{supp } E \subset \Gamma^{\mathbf{x}}(P, \theta)$ et non dans un cône convexe plus petit dont le sommet est à l'origine.
- 2) L'équation $P(D)u = f$ a une et une seule solution u avec $\text{supp } u \subset H$ et $u = E * f$.

Rappelons qu'on appelle solution fondamentale de l'opérateur $P(D)$ toute solution de l'équation $P(D)u = \delta$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, notons $\check{\varphi}(x) = \varphi(-x)$, alors la solution fondamentale E est donnée par :

$$\check{E}(\varphi) = E(\check{\varphi}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\tilde{\varphi}(\xi + i\tau\theta)}{P(\xi + i\tau\theta)} d\xi \quad \text{pour } \tau < \tau_0,$$

$\tilde{\varphi}$ dénotant la transformée de Fourier de φ . Elle est indépendante de τ , pour $\tau < \tau_0$.

Nous voulons préciser le sens qu'il faut donner à l'égalité $u = E * f$. Remarquons d'abord que le théorème affirme l'existence de la convolution.

Soit alors $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, on a :

$$u(\varphi) = \check{f}(E * \check{\varphi}) .$$

Vérifions en effet que u est bien solution de $P(D)u = f$.

On obtient en appliquant φ à $P(D)u$, par définition de l'opérateur adjoint ${}^tP(D)$:

$$(P(D)u)(\varphi) = u({}^tP(D)\varphi) .$$

$$\text{Or} \quad u({}^tP(D)\varphi) = \check{f}(E * P(D)\check{\varphi}) ,$$

$$\text{comme} \quad E * P(D)\check{\varphi} = P(D)E * \check{\varphi} = \delta * \check{\varphi} = \check{\varphi} \quad \text{on a donc}$$

$$(P(D)u)(\varphi) = \check{f}(\check{\varphi}) = f(\varphi) ,$$

ce qu'il fallait démontrer.

2 - Ensembles réguliers. Surfaces de "genre espace"

Nous introduirons dans ce paragraphe des notions qui seront utiles dans la suite et en particulier pour la résolution des problèmes de Cauchy.

Def. ([Sc 1]) : soit F un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}_n$, F est régulier au sens de Whitney si quelque soit le point $x_0 \in F$ il existe un triple (d, ω, q) , $d > 0$, $\omega \geq 0$ et q entier, $q \geq 1$, tel que, x et x' étant deux points quelconques de F distant de x_0 d'au plus d , ils peuvent être joints par une courbe rectifiable située dans F , et de longueur L telle que $L \leq \omega |x' - x|^{1/q}$.

En chaque point x_0 de F on peut prendre la plus petite valeur $q(x_0)$ possible. Si $K \subset F$ est une partie compacte de F on note $q(K)$ la borne supérieure des $q(x_0)$ pour $x_0 \in K$.

La propriété fondamentale des ensembles réguliers est donnée par le théorème d'extension de Whitney. Nous donnons sans démonstration deux lemmes et un théorème qui illustrent remarquablement cette propriété.

Le premier lemme est une version simplifiée du théorème de Whitney due à L. Hörmander ([H8 1]).

L'ensemble régulier F est l'hyperplan $x_0 = 0$ de $\mathbb{R}_n$.

Lemme : soient v et μ deux entiers positifs, $v \leq \mu$ et soient des fonctions $v_j \in C^{(\mu-j)}(\mathbb{R}_{n-1})$, $j \leq v$. Il existe une fonction $u \in C^{(\mu)}(\mathbb{R}_n)$ telle que $(\frac{d}{dx_0})^j u = v_j$, $j \leq v$ sur l'hyperplan $x_0 = 0$.

Le lemme et le théorème qui suivent sont les conséquences pour les espaces $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J}'$ du lemme précédent.

Lemme ([Sc 1]) : soient F un ensemble régulier, K une partie compacte de F et U un voisinage compact de K . Il existe alors un entier positif k , ne dépendant que de F, K, U et d'un entier positif m , tel que pour toute fonction $\varphi \in C^{(m')}(\mathbb{R}_n)$, $m' \geq q(K)m$, dont les dérivées d'ordre $\leq m'$ sont majorées en module par M sur F , il existe une fonction $\psi \in C^{(m)}(\mathbb{R}_n)$ vérifiant :

$$D^\alpha \varphi = D^\alpha \psi \quad \text{sur } K, \quad |\alpha| \leq m,$$

$$|D^\alpha \psi| < k M \quad \text{sur } U.$$

Si en plus $q(F)$ existe, on en déduit :

$$\|\psi\|_m \leq k \|\varphi\|_{m', F},$$

où

$$\|\varphi\|_{m', F} = \sup_{\substack{x \in F \\ |\alpha| \leq m'}} (1 + |x|)^{m'} |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Théorème : soit F un ensemble régulier et soit $f \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}_n)$ avec $\text{supp } f \subset F$, alors :

$$f = \sum_{|\alpha| \leq M} D^\alpha \mu_\alpha ,$$

où les μ_α sont des mesures à croissance lente* de support contenu dans F . L'entier M dépend de l'ordre de f et de $q(F)$.

Ce théorème n'est que la version tempérée du théorème 34 de L. Schwartz.

Soit maintenant $V = V^+ \cup V^-$ un cône ouvert de $\mathbb{R}_n$, V^+ étant convexe, $V^+ = -V^-$ et $V^+ \cap V^- = \emptyset$.

Def. Un sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}_n$ est dit de "genre espace" (relativement à V) si, quelque soit $x \in \mathcal{E}$

$$\mathcal{E} \cap \{\bar{V} + x\} = \{x\} \quad (1)$$

où $\bar{V}$ est la fermeture de V .

Supposons que le choix des coordonnées dans $\mathbb{R}_n$ soit tel que l'axe des x_0 (par exemple) soit dans le cône $\{0\} + \bar{V}$. Décomposons alors tout point $x \in \mathbb{R}_n$ en $(x_0, \vec{x})$, où $\vec{x}$ désigne un point courant de $\mathbb{R}_{n-1}$. La condition (1) exprime alors que si $(x_0, \vec{x}) \in \mathcal{E}$, c'est le seul point de $\mathbb{R}_n$ de la forme $(x'_0, \vec{x})$ qui appartienne à $\mathcal{E}$. Désignons par $\mathcal{E}_p$ la projection de l'ensemble $\mathcal{E}$ selon la direction x_0 . La remarque précédente montre qu'étant donné $\vec{x} \in \mathcal{E}_p$ il existe un et un seul x_0 tel que $(x_0, \vec{x}) \in \mathcal{E}_p$. Les éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$ sont donc de la forme $(f(\vec{x}), \vec{x})$ avec $\vec{x} \in \mathcal{E}_p$. La condition (1) exprime que le vecteur $(f(\vec{x}) - f(\vec{x}'), \vec{x} - \vec{x}') \notin \bar{V}$ quelques soient $\vec{x}, \vec{x}' \in \mathcal{E}_p$. On peut vérifier que d'après les conditions imposées à V , la fonction $f(\vec{x})$ est continue. On peut évidemment définir des variétés de codimension quelconque

* Une mesure $\mu(x)$ est à croissance lente s'il existe un entier p positif tel que $\int (1 + |x|)^{-p} |d\mu(x)| < +\infty$.

dans $\mathbb{R}_n$. En particulier, on définit une hypersurface fermée de genre espace de codimension 1 et de classe $C^{(m)}$ si $\mathcal{E}_p = \mathbb{R}_{n-1}$ et si f est de classe $C^{(m)}$.

Considérons alors le cas particulier où

$V = \{x \in \mathbb{R}_n \mid x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_{n-1}^2 \geq 0\}$. Nous allons caractériser $f(\vec{x})$. La condition (1) s'écrit, comme nous avons vu, $(f(\vec{x}) - f(\vec{x}'), \vec{x} - \vec{x}') \notin \bar{V}$. Calculons $\overrightarrow{\text{grad } f}$ pour une hypersurface Σ , fermée, de genre espace, de codimension 1 et de classe $C^{(1)}$ (tout ce qui suit ne concernera que cette classe d'hypersurface). On calcule alors la dérivée vectorielle de $f(\vec{x})$ selon la direction du gradient. Alors

$$\overrightarrow{\text{grad } f(\vec{x})} = \lim_{|\vec{h}| \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x})}{|\vec{h}|},$$

et

$$|\overrightarrow{\text{grad } f(\vec{x})}| \leq \lim_{|\vec{h}| \rightarrow 0} \frac{|f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x})|}{|\vec{h}|} < 1.$$

L'hypersurface Σ est donc caractérisée par le fait que sa normale, le vecteur $(1, -\overrightarrow{\text{grad } f})$, est dans le cône V .

Remarquons que la définition du paragraphe précédent revient à dire que :

- la normale est dans $\Gamma \cup -\Gamma$,
ou bien :

- le cône $x + \Gamma^x \cup -\Gamma^x$, $x \in \Sigma$ ne rencontre Σ qu'en x .

L'hypersurface Σ est orientable ; l'hypersurface Σ sépare $\mathbb{R}_n$ en deux parties Σ^+ et Σ^- (les indices + ou - peuvent par exemple être associés aux indices + ou - des deux composantes de V).

Le résultat important est le lemme suivant ([VI 1]) :

Lemme : l'hypersurface Σ est un ensemble régulier.

Dem. Soient $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2 \in \Sigma$. On peut les relier par une courbe C définie par :

$$x_0(t) = f(\vec{x}(t)) \quad , \quad \vec{x}(t) = t\vec{x}_1 + (1-t)\vec{x}_2 \quad , \quad 0 \leq t \leq 1 \quad .$$

Majorons la longueur L de la courbe C ,

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{|x'_0(t)|^2 + |\vec{x}'(t)|^2} dt = \int_0^1 \{ |\overrightarrow{\text{grad}}_t f \cdot (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)|^2 + |\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2 \}^{1/2} dt \\ &\leq \int_0^1 \{ (1 + |\overrightarrow{\text{grad}}_t f|^2) (|\vec{x}_1 - \vec{x}_2|^2) \}^{1/2} dt \leq \sqrt{2} |\vec{x}_1 - \vec{x}_2| \quad . \end{aligned}$$

Donc d'après la définition des ensembles réguliers, on a $\omega = \sqrt{2}$ et $q(\vec{x}) = 1 = q(\Sigma)$.

Nous avons vu que Σ donnée par $x_0 = f(\vec{x})$ se caractérisait par $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}')| < |\vec{x} - \vec{x}'|$. Prenons pour point $\vec{x}'$ l'origine de $\mathbb{R}_{n-1}$, la condition précédente devient alors, en posant $f(0) = a$:

$$|x_0 - a| < |\vec{x}| \quad .$$

Nous aurons besoin dans la suite d'une condition plus restrictive.

Def. L'hypersurface Σ , d'équation $x_0 = f(\vec{x})$, sera strictement de "genre espace" s'il existe ρ , $0 \leq \rho \leq 1$ tel que :

$$|x_0 - a| \leq \rho |\vec{x}| \quad \forall (x_0, \vec{x}) \in \Sigma \quad .$$

Nous sommes maintenant en mesure de discuter le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques.

3 - Le problème de Cauchy

Sous sa forme générale, le problème de Cauchy se présente comme suit ([H8 1]) :

Def. Soient $P(D)$ un opérateur différentiel d'ordre m , $\theta (\neq 0)$ un vecteur de $\mathbb{R}_n$, f et φ deux fonctions. Résoudre le problème de Cauchy pour des données sur l'hyperplan $\langle x, \theta \rangle = 0$ c'est trouver une solution u de l'équation $P(D)u = f$ telle que :

$$u - \varphi = 0(\langle x, \theta \rangle^m) \quad \text{pour } \langle x, \theta \rangle \rightarrow 0 \quad (1)$$

l'égalité jusqu'à l'ordre m ayant lieu sur tous les sous-ensembles bornés.

Lorsque $u - \varphi$ est suffisamment dérivable, la condition (1) n'exprime rien d'autre que la nullité sur l'hyperplan $\langle x, \theta \rangle = 0$ des dérivées transverses de $u - \varphi$ d'ordre $< m$.

On a alors le théorème suivant ([H8 1]) :

Théorème 2 : soient $P(D)$ un opérateur différentiel d'ordre m , hyperbolique par rapport à $\theta (\theta \neq 0, \theta \in \mathbb{R}_n)$ et le demi-espace $H = \{x \in \mathbb{R}_n \mid x \cdot \theta \geq 0\}$, soient j et r deux entiers positifs, $j \geq m$ et $r = [\frac{n}{2}] + 1$ ($[\frac{n}{2}]$ est la partie entière de $\frac{n}{2}$), alors, pour tout $f \in C^{j+r}(H)$ et tout $\varphi \in C^{j+m+r}(H)$ il existe une et une seule solution u , $u \in C^j(H)$, au problème de Cauchy relatif au quadruple $(P(D), \theta, f, \varphi)$. De plus, en tout point $x \in H$, cette solution est uniquement déterminée par les restrictions de f et φ au cône $x - \Gamma^*(P, \theta)$.

Nous ne démontrerons pas ce théorème.

Remarques

- 1) Puisque la solution u ne dépend que des valeurs de f et φ dans le cône $x - \Gamma^*(P, \theta)$, on voit que le problème de Cauchy peut être étudié localement.
- 2) On peut remplacer l'hyperplan $\langle x, \theta \rangle = 0$ par une surface de "genre espace", c'est-à-dire dont les normales sont contenues dans le cône $\Gamma(P, \theta)$.
- 3) On peut définir un problème de Cauchy dans le cas des distributions (voir [Sc 1]) et obtenir un théorème d'unicité. Si en particulier $P(D)$ est hypoelliptique par rapport à $\langle x, \theta \rangle$, on peut définir un problème de Cauchy par régularisation et appliquer le théorème 2.

II . APPLICATION A L'EQUATION D'ONDE

Nous introduisons le produit scalaire de Lorentz

$x \cdot \theta = x_0 \theta_0 - x_1 \theta_1 - \dots - x_{n-1} \theta_{n-1}$ et définissons dorénavant la dualité de Fourier par ce produit scalaire.

1 - Généralités

Nous avons vu que l'équation d'onde ($n > 2$)

$P(D) = \square_n = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$ est hyperbolique par rapport aux

éléments de l'ensemble $V = V^+ \cup V^-$ avec $V = \{\theta \in \mathbb{R}_n \mid \theta \cdot \theta = \theta_0^2 > 0\}$,

$V^+ = \{\theta \in V \mid \theta_0 > 0\}$ et $V^- = V^+$. De plus l'ensemble des directions de genre temps T est égal à V .

Enfin $\square_n$ est hypoelliptique par rapport à x_0 et par rapport à $(x_1, \dots, x_{n-1})$. La première hypoellipticité justifie les restrictions aux hyperplans $x_0 = C^{te}$ des solutions de l'équation d'onde.

Soient donc $\theta \in V^+$ et H^+ le demi-espace $\{x \in \mathbb{R}_n \mid x \cdot \theta \geq 0\}$, d'après le théorème 1 il existe une solution fondamentale E_n^+ de

support dans H et qui s'écrit :

$$E_n^+(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\tilde{\varphi}(\xi + i\tau\theta)}{[-(\xi + i\tau\theta)^2]} d\xi \quad \text{pour } \tau < \tau_0 \text{ et } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n).$$

On a donc

$$E_n^+(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int \frac{\tilde{\varphi}(\xi + i\tau\theta)}{[-(\xi + i\tau\theta)^2]} d\xi \quad \text{pour } \tau < -\tau \text{ et } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n).$$

On voit aisément que $(\xi + i\tau\theta)^2 \neq 0$ pour τ réel, $\neq 0$, θ dans V et ξ quelconque dans $\mathbb{R}_n$, d'où, d'après la définition de l'hyperbolicité $\tau_0 = 0$. Comme pour un polynôme hyperbolique $|P(\xi + i\tau\theta)| \geq |P_m(\theta)| |\tau - \tau_0|^m$, on a

$$|(\xi + i\tau\theta)^{-2}| \leq |\theta^2|^{-1} \frac{1}{\tau} \quad \text{pour } \tau \neq 0 \text{ et } \theta \in V \text{ et}$$

d'après un théorème connu (voir [Ep 1], [St 1], [Vl 1]) la fonction $[-z^2]^{-1}$ où $z = \xi + i\eta$, $\eta = \tau\theta$ analytique dans le tube $T = T^+ \cup T^- = \{z \in \mathbb{C}_n \mid \text{Im } z \in V\}$ admet, lorsque $\tau \rightarrow 0^+$ ou $\tau \rightarrow 0^-$, des valeurs au bord dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$.

Lemme : la solution fondamentale E_n^+ est une distribution tempérée donnée par :

$$E_n^+(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{[-(\xi + i\tau\theta)^2]} d\xi \quad \text{pour } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_n) \text{ et } \theta \in V^+.$$

Dem. Nous montrons d'abord que pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$

$$E_n^+(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{[-(\xi + i\tau\theta)^2]} d\xi.$$

Comme $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$, $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_n)$ et puisque la valeur au bord est tempérée l'intégrale du second membre existe par définition. Il nous suffit donc de montrer que :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int \frac{\tilde{\varphi}(\xi) - \tilde{\varphi}(\xi + i\tau\theta)}{[-(\xi + i\tau\theta)^2]} d\xi = 0.$$

Or les dérivées partielles d'une fonction dans $\mathcal{S}$ sont dans $\mathcal{S}$, on développe alors $\tilde{\varphi}(\xi + i\tau\theta)$ en série de Taylor jusqu'à l'ordre 2. Le terme constant s'élimine, les dérivées sont multipliées par τ et le reste se majore aussi par τ . Comme pour $\tau \neq 0$ l'expression initiale de $E_n^+(\varphi)$ ne dépend pas de τ , nous avons montré l'égalité.

Enfin comme les fonctions C_0^∞ sont denses dans $\mathcal{S}$ et que $\lim_{\tau \rightarrow 0^+} [-(\xi + i\tau\theta)^2]^{-1}$ est dans $\mathcal{S}'$ on a la définition annoncée pour E_n^+ . On peut évidemment définir E_n^- comme limite de l'expression

$$E_n^-(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \lim_{\tau \rightarrow 0^-} \int \frac{\tilde{\varphi}(\xi)}{[-(\xi + i\tau\theta)^2]} d\xi \quad \text{pour } \theta \in V^+.$$

En prenant la somme $E_n = \frac{1}{2} (E_n^+ + E_n^-)$ on obtient une autre solution fondamentale mais dont le support est contenu dans le cône $\bar{V}$. Enfin la différence $D_n = E_n^+ - E_n^-$ est une solution de l'équation homogène. On obtient :

$$D_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi^{-m+1} \varepsilon(x_0) \delta^{(m-2)}(x^2) & \text{si } n = 2m \quad m \geq 2 \\ \frac{1}{2} (-1)^{m-1} \pi^{-m-1/2} \Gamma(m-1/2) \varepsilon(x_0) [\theta(x^2)x^2]^{-m+1/2} & \text{si } n = 2m+1, \end{cases}$$

on trouve dans V.S. Vladimirov ([Vl 1]) les définitions des distributions tempérées $\delta^{(s)}(x^2)$ et $[\theta(x^2)x^2]^{-s}$ pour s entier ou demi-entier (s ne peut pas cependant être quelconque).

Comme d'autre part l'équation d'onde est hypoelliptique en x_0 , les restrictions de D et des dérivées par rapport à x_0 de D sur un hyperplan $x_0 = C^{te}$ existent en tant qu'éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_{n-1})$ et on a pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{n-1})$:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad & \lim_{x_0 \rightarrow \pm 0} D(x_0, \varphi) = 0 \\ \beta) \quad & \lim_{x_0 \rightarrow \pm 0} \frac{\partial}{\partial x_0} D(x_0, \varphi) = \varphi(0) \\ \gamma) \quad & \lim_{x_0 \rightarrow \pm 0} \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} D(x_0, \varphi) = 0, \end{aligned}$$

où $D(x_0, \varphi) = \langle D(x_0, \vec{x}), \varphi(\vec{x}) \rangle$.

2 - Problème de Cauchy et principe de Huyghens

Soit $\mathbb{R}_n$, une surface fermée strictement de genre espace Σ . On a vu qu'elle sépare l'espace en deux demi-espaces H^+ et H^- avec $H^+ \cup H^- = \mathbb{R}_n$ et $H^+ \cap H^- = F$. Soit alors $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_n)$ tel que $\text{supp } f \subset H^+$ (respect. H^-), l'équation hyperbolique $\square_n u = f$ a une et une seule solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_n)$ telle que $\text{supp } u \subset H^+$ (respect. H^-) et $u = E_n^+ f$ (respect. $u = E_n^- f$). Ceci résulte immédiatement des théorèmes 1 et 2 de la première partie. Nous allons montrer que si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$ alors $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$. Revenons pour l'instant au sens qu'il faut donner à la solution du théorème 1. On a vu que $u = E * f$ devait s'interpréter comme $u(\varphi) = \check{f}(E_* \check{\varphi})$. Comme Σ est un ensemble régulier, f peut s'interpréter comme une fonctionnelle linéaire sur l'espace de Banach des fonctions C^∞ muni de la norme $\| \cdot \|_{m, \Sigma}$, $m = m(f)$. Il nous suffit donc de montrer, pour que $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$, qu'il existe deux nombres $p \geq 0$ et $K > 0$ tels que^{*} :

$$\|E * \varphi\|_{m, \Sigma} \leq K \|\varphi\|_p.$$

V.S. Vladimirov a montré le lemme suivant ([Vl 1]) que nous donnons sans démonstration :

Lemme : soit $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$ tel que $\text{supp } g \subset \bar{V}$ et soit l'ensemble régulier F donné par :

$$F = \{x \in \mathbb{R}_n \mid |x_0 - a| \leq \rho |\vec{x}|\}, \quad 0 \leq \rho \leq 1,$$

alors, quelque soit m positif ou nul et $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$ il existe deux nombres $K = K(\varphi, g, F, m)$ et $p = p(g, m)$, $K > 0$ et $p \geq 0$ tels que :

$$\|g * \varphi\|_{m, F} \leq K \|\varphi\|_p.$$

^{*}Rappelons que

$$\|\varphi\|_p = \sup_{|\alpha| \leq p} (1 + |x|)^p |D^\alpha \varphi(x)|.$$

Ce résultat est essentiellement le fait que les translatés de $\bar{V}$ rencontrent F selon des parties compactes.

Comme Σ est strictement de genre espace, Σ est contenu dans un ensemble F ; nous pouvons donc appliquer le lemme pour E_n^+ , E_n^- et les combinaisons linéaires de E_n^+ et E_n^- et donc en particulier $E_n^+ * f$ est une distribution tempérée.

Nous avons vu que D_n était une solution de l'équation homogène, comme $\text{supp } D_n \subset \bar{V}$, $D_n * f$ existe et est une solution de l'équation homogène, tempérée si f est tempérée.

Supposons alors que f soit indéfiniment différentiable, la solution $u = D_u * f = E_n^+ * f - E_n^- * f$ de l'équation d'onde est indéfiniment différentiable; supposons en plus que $\Sigma = \{x | x_0 = C^{te}\}$ alors en appliquant le résultat du théorème 2 sur le domaine de dépendance des solutions $E_n^+ * f$ on a :

Principe de Huyghens : si dans l'hyperplan $x_0 = C^{te}$ une solution régulière u de l'équation $\square_n u = 0$ est nulle ainsi que sa dérivée normale dans un disque fermé D , alors elle est nulle dans le double cône s'appuyant sur ce disque.

On peut évidemment étendre ce résultat au cas des distributions tempérées (voir le paragraphe suivant).

3 - Représentation intégrale des solutions tempérées de l'équation homogène

Soit $u \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}_n)$ une solution de l'équation $\square_n u = 0$ et soit Σ une hypersurface strictement de genre espace. Comme Σ est régulière, Σ sépare $\mathbb{R}_n$ en deux demi-espaces H^+ et H^- qui sont aussi des ensembles réguliers. D'après le théorème XXXIV de L. Schwartz ([Sc 1]) u peut s'écrire $u = u^+ - u^-$ avec $u^\pm \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}_n)$ et $\text{supp } u^\pm \subset H^\pm$. De plus,

comme $\square_n u^\pm \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_n)$, $\text{supp } \square_n u^\pm \subset H^\pm$ et $\square_n u^+ = \square_n u^- = \phi$, on a $\phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_n)$ et $\text{supp } \phi \subset H^+ \cap H^- = \Sigma$. On applique alors le théorème 1 et donc $u^\pm = E_n^\pm * \phi$ et par conséquent $u = (E_n^+ - E_n^-) * \phi = D_n * \phi$. Supposons que $u = v^+ - v^-$ soit une autre décomposition de u ; elle définit un élément $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_n)$, $\text{supp } \varphi \subset \Sigma$ tel que $\square_n v^+ = \square_n v^- = \varphi$. De l'égalité $u = v^+ - v^- = u^+ - u^-$ on déduit que $v^+ - u^+ = v^- - u^- = h$, $h \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_n)$, $\text{supp } h \subset \Sigma$ et $\square_n v^+ - \square_n u^+ = \varphi - \phi = \square_n h$.

Donc pour la représentation intégrale de la solution tempérée u de $\square_n u = 0$ donnée par $D_n * \phi$, la distribution ϕ est déterminée à $\square_n h$ près où h est une distribution tempérée quelconque de support contenu dans Σ^* .

Nous allons préciser maintenant cette représentation en donnant explicitement ϕ en fonction des valeurs de u et de sa dérivée normale sur Σ .

Suivant en cela V.S. Vladimirov ([V1 1]) nous définissons $\delta(\Sigma)f$, $\delta(\Sigma)\frac{\partial f}{\partial n}$, $\frac{\partial}{\partial n}(\delta(\Sigma)f)$ pour $f \in C^1(\mathbb{R}_n)$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{n-1})$ par :

$$\langle \delta(\Sigma)f, \varphi \rangle = \int_{\Sigma} f(x) \varphi(x) d\sigma$$

$$\langle \delta(\Sigma) \frac{\partial f}{\partial n}, \varphi \rangle = \int_{\Sigma} \frac{\partial f}{\partial n}(x) \varphi(x) d\sigma$$

$$\langle \frac{\partial}{\partial n}(\delta(\Sigma)f), \varphi \rangle = - \int_{\Sigma} f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial n} d\sigma$$

avec $d\sigma = (\gamma^0)^{-1} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ et $\frac{\partial}{\partial n} = \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \dots + \gamma^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$ les coefficients $\gamma^0, \dots, \gamma^{n-1}$ étant les coefficients directeurs de la normale à Σ au point x . Nous allons montrer que $\square_n u^+ = \square_n u^- = \phi$ est égal à $\delta(\Sigma) \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial n}(\delta(\Sigma)u)$. Remarquons d'abord que les trois formules précédentes peuvent dans certains cas s'étendre à des f qui soient des distributions.

* Cette remarque est due à R. Stora.

Considérons donc une solution u de $\square u = 0$ suffisamment régulière (au moins C^1) et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_n)$ on a, en appliquant la formule de Green :

$$\begin{aligned} \langle \square_n u^+, \varphi \rangle &= \langle u^+, \square_n \varphi \rangle = \int_{H^+} u \square_n \varphi \, dx_0 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{H^+} \varphi \square u \, dx_0 \dots dx_{n-1} - \int_{\Sigma} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma, \end{aligned}$$

et comme $\square u = 0$

$$\langle \square_n u^+, \varphi \rangle = \langle \delta(\Sigma) \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} (\delta(\Sigma)u), \varphi \rangle = \langle \psi, \varphi \rangle.$$

On peut cependant étendre cette formule au cas où Σ est un hyperplan non caractéristique et u est dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_n)$; en effet l'hypoellipticité par rapport à la direction normale rend licite les restrictions à Σ de u et de sa dérivée normale. Le cas où Σ est quelconque (mais toujours C^1) est évident puisque localement Σ est homéomorphe à un hyperplan non caractéristique. Enfin puisque u, u^+ et u^- sont tempérées et que les fonctions C_0^∞ sont denses dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$ on a :

$$\psi = \delta(\Sigma) \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} (\delta(\Sigma)u) \quad \text{dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}_n).$$

Remarquons d'ailleurs que, puisque $u = D * \psi$, il suffit de montrer que $\delta(\Sigma)D$, $\delta(\Sigma) \frac{\partial}{\partial n} D$ et $\frac{\partial}{\partial n} (\delta(\Sigma)D)$ sont dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_n)$ et comme leurs supports sont dans $\bar{V}$, d'appliquer le lemme de Vladimirov sur le produit de convolution. On vérifie alors directement que $\psi = \delta(\Sigma) \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} (\delta(\Sigma)u)$.
D'où :

Théorème : soit Σ une hypersurface $C^{(1)}$ strictement de genre espace ; toute solution tempérée de l'équation d'onde s'écrit :

$$u = D * \phi_\Sigma \quad \phi_\Sigma \in \mathcal{S}', \quad \text{supp } \phi_\Sigma \subset \Sigma,$$

$$\text{où } \phi_\Sigma = \delta(\Sigma) \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} (\delta(\Sigma)u).$$

Remarques

- 1) Lorsque $\Sigma = \{x | x_0 = C^{te}\}$, cette représentation est une conséquence immédiate des propriétés $\alpha)$, $\beta)$ et $\gamma)$ que vérifie la solution D .
- 2) L'existence d'une telle représentation, quelque soit la solution tempérée u , permet d'utiliser le théorème 2 étendu au cas des distributions pour démontrer un principe de Huyghens pour les solutions non régulières.
- 3) La réciproque du théorème, à savoir que les distributions $u = D * \phi_\Sigma$ avec $\phi_\Sigma \in \mathcal{D}'$ et $\text{supp } \phi_\Sigma \subset \Sigma$ sont des solutions tempérées de $\square u = 0$, est évidente.

III - LA REPRESENTATION DE DYSON

R. Jost et H. Lehmann ([Jo 1]) puis F.J. Dyson ([Dy 1]) ont donné une représentation intégrale pour une classe de distributions tempérées, caractérisée par des conditions sur les supports de ces distributions. D'une part leurs supports sont contenus dans le cône de lumière $\bar{V} = \bar{V}^+ \cup \bar{V}^-$, d'autre part les transformées de Fourier de ces distributions s'annulent dans une région $\mathcal{R}$ qui est délimitée, en première approximation par deux surfaces de genre espace.

Soit f une telle distribution ; comme $\bar{V}$ peut s'écrire comme l'union de deux ensembles réguliers, il existe deux distributions tempérées f^+ et f^- de supports respectifs $\bar{V}^+$ et $\bar{V}^-$, définies à une distribution de support l'origine près, telles que $f = f^+ - f^-$. En prenant les transformées de Laplace de f^+ et f^- , on obtient deux fonctions analytiques dans des tubes T^+ et T^- , ayant pour bases les cônes duaux de $\bar{V}^+$ et $\bar{V}^-$, et qui, puisque la transformée de Fourier de f est nulle dans $\mathcal{R}$, ont des valeurs au bord qui coïncident sur $\mathcal{R}$. D'après le théorème de l'Edge of the Wedge ([Ep 1],[Vl 1]) il existe une fonction F analytique dans $T^+ \cup T^- \cup v(\mathcal{R})$, où $v(\mathcal{R})$ est un voisinage complexe de $\mathcal{R}$, qui coïncide avec f^+ dans T^+ et f^- dans T^- . La représentation de Dyson est alors essentiellement la donnée d'une représentation intégrale de cette fonction analytique F . Le noyau intégral qui apparaît dans cette représentation est particulièrement simple et permet d'obtenir de façon géométrique l'enveloppe d'holomorphie de $T^+ \cup T^- \cup v(\mathcal{R})$ (qui n'est pas un domaine d'holomorphie).

Nous allons dans les paragraphes qui suivent exposer l'essentiel de ces résultats.

1 - Le théorème de Gårding-Dyson ([Wi 1],[Vl 1])

La remarque fondamentale, due à Dyson ([Dy 1]), est l'existence d'une relation entre les distributions tempérées, dont le support est contenu dans le cône de lumière $\bar{V}$, et les solutions tempérées de l'équation d'onde.

Théorème (Gårding-Dyson) : soient $\mathcal{S}'(\bar{V})$ les distributions tempérées^{*} dont le support est dans $\bar{V}$ et $\mathcal{G}$ les solutions distributions tempérées de l'équation :

$$\square_{n+2} u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right) u = 0$$

satisfaisant à la condition $\frac{\partial}{\partial \lambda} u(x, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = 0$.

Alors, les ensembles $\mathcal{S}'(\bar{V})$ et $\mathcal{G}$ sont en correspondance biunivoque.

Dem. ([Vl 1]) Remarquons d'abord que la condition imposée aux solutions de l'équation d'onde a un sens. En effet l'opérateur $\square_{n+2}$ est hypoelliptique par rapport à λ , la restriction à $\lambda = 0$ existe donc en tant qu'élément de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_{n+1})$. Introduisons la notation suivante :

soit $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_n)$ et soit $\tilde{f}(\xi) = \int e^{-i\xi x} f(x) dx$, on note $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ l'homéomorphisme^{**} qui à f fait correspondre $\tilde{f}$. Ainsi $F^{-1}[\tilde{f}](\xi) = f(\xi)$. Cet homéomorphisme s'étend par dualité en un homéomorphisme de $\mathcal{S}'$ sur $\mathcal{S}'$ donné par :

$$\langle F[g], \varphi \rangle = \langle g, F[\varphi] \rangle \quad \text{pour } g \in \mathcal{S}' \text{ et } \varphi \in \mathcal{S}.$$

^{*}On définit $\mathcal{S}'(\bar{V})$ par : $\mathcal{S}'(\bar{V}) = \bigcap_{\varepsilon} \mathcal{S}'(V_{\varepsilon})$ où V_{ε} est un ε -voisinage de $\bar{V}$ (les points de V_{ε} sont à une distance au plus égale à ε de ceux de $\bar{V}$).

^{**}Comme nous l'avons indiqué dans le chapitre précédent la dualité de Fourier s'effectue par rapport au produit scalaire de Lorentz.

Supposons que $\mathbb{R}_n = \mathbb{R}_n, x \in \mathbb{R}_n$ et notons x' et x'' les variables correspondantes, ξ' et ξ'' les variables duales, $F[g(\xi', \xi'')](x')$ représente alors la transformée de Fourier partielle de $g \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}_n)$ par rapport aux variables ξ' .

Considérons alors l'équation $\square_{n+2} u = 0$. Par transformation de Fourier elle s'écrit :

$$(\xi^2 - \sigma^2) F^{-1}[u](\xi, \sigma) = 0, \quad ,$$

où (ξ, σ) sont les variables duales de (x, λ) . On a donc, pour $\xi^2 = \xi_0^2 - \xi_1^2 - \dots - \xi_n^2 < 0$, $F^{-1}[u](\xi, \sigma) = 0$, σ étant quelconque. D'où :

$F^{-1}[u(x, \lambda)](\xi) = 0$ si $\xi^2 < 0$, λ quelconque (d'après l'hypoellipticité). En particulier :

$$F^{-1}[u(x, 0)](\xi) = 0 \quad \text{si } \xi^2 < 0.$$

Ceci montre, de façon peu rigoureuse, mais on peut le rendre rigoureux en utilisant des fonctions d'essai, que tout élément de $\mathcal{G}$ donne un élément de $\mathcal{J}'(\bar{V})$. La correspondance est donnée par :

$$u \mapsto F^{-1}[u(x, 0)].$$

Montrons maintenant que tout $\tilde{f} \in \mathcal{J}'(\bar{V})$ donne un élément de $\mathcal{G}$. Soit donc $\tilde{f} \in \mathcal{J}'(V)$, d'ordre N , on définit $\tilde{u}(\xi, \lambda) = \tilde{f}(\xi) \cos(\lambda \sqrt{\xi^2})$ par

$$\tilde{u}(\xi, \lambda) = \tilde{f}(\xi) \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{(\xi^2)^k \lambda^{2k}}{(2k)!} + \tilde{f}(\xi) \varphi(\xi, \lambda), \quad ,$$

où

$$\varphi(\xi, \lambda) = \theta(\xi^2) \left[\cos(\lambda \sqrt{\xi^2}) - \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k (\xi^2)^k \lambda^{2k}}{(2k)!} \right].$$

Les produits de $\tilde{f}$ par la somme finie et par $\phi(\xi, \lambda)$ existent car :

1) la somme finie est un élément^{*} de θ_M ,

2) $\phi(\xi, \lambda)$ est à croissance polynomiale et appartient à $C^N(\mathbb{R}_{n+2})$ donc à un espace de multiplicateurs pour les éléments de $\mathcal{S}'_N$ (distributions tempérées d'ordre au plus N).

On voit immédiatement que pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{n+1})$, $\phi(\xi, \lambda)\varphi \in \mathcal{S}^{(N)}$ (espace de Banach muni de la norme $\sup_{x, |\alpha| \leq N} (1 + |x|)^N |D^\alpha \varphi|$) et que l'on a les convergences suivantes quand $\lambda \rightarrow 0$

$$\phi(\xi, \lambda)\varphi(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \phi(\xi, \lambda)\varphi(\xi) \rightarrow 0.$$

On voit donc que, au sens de la topologie de $\mathcal{S}'$, lorsque $\lambda \rightarrow 0$

$$\tilde{u}(\xi, \lambda) \rightarrow \tilde{f} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} \tilde{u}(\xi, \lambda) \rightarrow 0.$$

En transformant de Fourier par rapport à ξ on obtient alors la condition $\frac{\partial}{\partial \lambda} u(x, \lambda) = 0$.

Nous devons montrer maintenant que $u(x, \lambda)$ vérifie l'équation d'onde $\square_{n+2} u = 0$.

En effet, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_{n+2})$

$$\begin{aligned} \langle \square_{n+2} u, \varphi \rangle &= \langle u, \square_{n+2} \varphi \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \int e^{i\xi \cdot x} \tilde{u}(\xi, \lambda) \square_{n+2} \varphi \, d\xi \, d\lambda \, dx \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \int \left[(-\xi^2 - \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}) \tilde{u}(\xi, \lambda)\right] \varphi(x, \lambda) e^{ix \cdot \xi} \, dx \, d\lambda \, d\xi. \end{aligned}$$

^{*} θ_M est l'espace des multiplicateurs pour $\mathcal{S}'$. C'est l'ensemble des fonctions C^∞ à croissance lente.

D'après la définition de $\tilde{u}(\xi, \lambda)$ on a que :

$$-\left(\xi^2 + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\right) \tilde{u}(\xi, \lambda) = \frac{(-1)^{N+1}}{(2N)!} \lambda^{2N} \tilde{f}(\xi) (1 - \theta(\xi^2)) (\xi^2)^{N+1},$$

et

$$\langle \square_{n+2} u, \varphi \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \int dx d\lambda \varphi(x, \lambda) \frac{(-1)^{N+1}}{(2N)!} \lambda^{2N} \int \tilde{f}(\xi) (1 - \theta(\xi^2)) (\xi^2)^{N+1} e^{i\xi \cdot x} d\xi$$

or $(1 - \theta(\xi^2)) (\xi^2)^{N+1} \in C^{(N)}$ donc $e^{i\xi \cdot x} (1 - \theta(\xi^2)) (\xi^2)^{N+1}$ est pour tout x un élément à croissance lente qui pour tout élément de $\mathcal{F}$, d'ordre inférieur ou égal à N , est un multiplicateur. Or cet élément est nul sur $\bar{V}$ et comme $\text{supp } \tilde{f} \subset \bar{V}$ on a :

$$\tilde{f}(\xi) (1 - \theta(\xi^2)) (\xi^2)^{N+1} e^{i\xi \cdot x} = 0.$$

D'où

$$\square_{n+2} u = 0.$$

L'unicité de la solution résulte de l'unicité des solutions du problème de Cauchy non caractéristique. Non seulement les différentes solutions possibles coïncident sur l'hyperplan $\lambda=0$, mais encore leur dérivée transverse s'annule sur ce plan.

Le problème de la représentation intégrale des distributions dont nous avons parlé dans l'introduction est donc équivalent à celui de la représentation intégrale des restrictions à un hyperplan des solutions tempérées de l'équation d'onde, les transformées de Fourier de ces restrictions devant s'annuler dans une région $\mathcal{R}$. Nous allons voir que le théorème du double cône et le principe de Huyghens (c'est-à-dire l'hyperbolicité) permettent d'agrandir sensiblement cette région.

Nous allons nous situer dans un contexte plus général que celui présenté dans l'introduction. Notons par $\mathcal{C}(\Omega)$ la classe des

distributions tempérées $\tilde{f} \in \mathcal{J}'(\bar{V})$ et telles que $F[\tilde{f}]$ s'annule dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}_{n+1}$. D'après le théorème de Gårding-Dyson pour tout $\tilde{f} \in \mathcal{J}'(\bar{V})$, il existe une solution tempérée $u(x, \lambda)$ de $\square_{n+2} u = 0$, satisfaisant $\frac{\partial}{\partial \lambda} u(x, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = 0$, telle que :

$$F[\tilde{f}](x) = u(x, \lambda) \Big|_{\lambda=0} .$$

Si en plus $\tilde{f} \in \mathcal{C}(\Omega)$, $u(x, \lambda) \Big|_{\lambda=0}$ est nulle dans Ω . Supposons alors qu'il existe dans Ω un segment de genre temps et même plus exactement un voisinage (dans $\mathbb{R}_{n+1}$) de ce segment. Il est alors possible d'agrandir Ω en appliquant le théorème du double cône. Deux méthodes sont possibles. La première consiste à montrer, en utilisant le théorème d'unicité d'Holmgren et l'hyperbolicité de l'équation d'onde, que u est nul dans un voisinage de ce segment qui soit un ouvert de $\mathbb{R}_{n+2}$ et ensuite d'appliquer le théorème du double cône (voir [V1 1]).

La seconde s'appuie sur le fait que non seulement $u(x, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = 0$, mais aussi $(\frac{\partial}{\partial \lambda})^m u(x, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = 0$ quelque soit l'ordre de dérivation et quelque soit le point x sur le segment. On applique alors le théorème suivant :

Théorème : soit $u \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}_n)$, une solution de l'équation d'onde $\square_n u = 0$. Si u a un zéro d'ordre infini sur un segment ouvert de genre temps, alors u s'annule dans le double cône s'appuyant sur ce segment.

Par zéro d'ordre infini, nous entendons la nullité de u et de ses dérivées en tout point du segment. Cette condition a un sens d'après l'hypoellipticité des directions de genre temps. Nous ne démontrons pas ce théorème ([Co 1], [Ni 1]).

Puisque u est nulle dans un voisinage, situé dans l'hyperplan $\lambda = 0$, du segment, on a, en tout point de ce segment :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^{\alpha_0} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u(x, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = 0 \quad \forall (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}_{n+1}^+ .$$

Il nous reste à vérifier pour pouvoir appliquer le théorème que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)^m u(x, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = 0 .$$

Les dérivées paires sont alors nulles puisque $(\frac{\partial}{\partial \lambda})^{2m} u = (\square_{n+1})^m u$.

Les dérivées d'ordre impair s'annulent d'après la condition

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} u(x, \lambda) \Big|_{\lambda=0} = 0.$$

Nous voyons donc par ces deux méthodes, que si u est nulle dans Ω , alors u est nulle dans $B_P(\Omega)$ où $P = \square_{n+2}$.

2 - Les enveloppes $B(\Omega)$

Avant de décrire les enveloppes $B(\Omega)$, nous allons faire quelques remarques techniques sur les enveloppes $B_P(\Omega)$.

Supposons que Ω soit P -régulier, alors :

$$B_P(\Omega) = \bigcup_{x^1, x^2 \in \Omega} B_P(x^2, x^1) = \bigcup_{x^1, x^2 \in \Omega} \{x \in \mathbb{R}_{n+1} \mid x_0^1 + |\vec{x} - \vec{x}^1| < x_0^2 - |\vec{x} - \vec{x}^2|\},$$

avec $x^2 > x^1$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $P = \square_{n+1}$.

Définissons $A^+(\vec{x})$ et $A^-(\vec{x})$ par :

$$A^+(\vec{x}) = \sup_{x' \in \Omega} (x_0' - |\vec{x} - \vec{x}'|),$$

$$A^-(\vec{x}) = \inf_{x' \in \Omega} (x_0' + |\vec{x} - \vec{x}'|),$$

alors

$$B_P(\Omega) = \{x \in \mathbb{R}_{n+1} \mid A^-(\vec{x}) < x_0 < A^+(\vec{x})\}.$$

Soient deux points $\vec{x}^1$ et $\vec{x}^2$ de $\mathbb{R}_n$ tels que $|\vec{x}^1 - \vec{x}^2| < \varepsilon$.

Comme

$$|\vec{x}^2 - \vec{x}'| - \varepsilon < |\vec{x}^1 - \vec{x}'| < |\vec{x}^2 - \vec{x}'| + \varepsilon,$$

on a

$$|A^+(\vec{x}^1) - A^+(\vec{x}^2)| \leq \varepsilon,$$

et de même pour A^- .

Enfin,

$$A^+(\vec{x}) \geq \sup_{x' \in \Omega} (x'_0 - |\vec{x}'| - |\vec{x}|) = c - |\vec{x}|$$

et

$$A^-(\vec{x}) \leq \inf_{x' \in \Omega} (x'_0 + |\vec{x}'| + |\vec{x}|) = d + |\vec{x}| ,$$

les constantes c et d ne dépendant que de Ω .

Ces deux résultats montrent donc que soit A^+ est fini, soit $A^+ = +\infty$; de même soit A^- est fini, soit $A^- = -\infty$.

Nous pouvons donc, suivant en cela V.S. Vladimirov, classer les ensembles P-réguliers selon le comportement de A^+ et A^- . Ils sont de

rang 2 si $|A^+| \neq \infty$,

rang 1 si l'une des quantités A^+ ou A^- est finie,

rang 0 si $|A^+| = \infty$.

Remarquons enfin que $|A^-(\vec{x}^1) - A^-(\vec{x}^2)| \leq |\vec{x}^1 - \vec{x}^2|$, donc les surfaces $x_0 = A^-(\vec{x})$ ne sont pas de genre espace, elles peuvent être de genre lumière.

La description des enveloppes $B(\Omega)$

La propriété essentielle pour tout ce qui va suivre est que l'ensemble des points $z \in \mathbb{E}_n$ tels que $(z - x')^2 = \rho$ avec $x' \in \mathbb{R}_n$ et $\rho \geq 0$, décrit le complémentaire de l'union des tubes T^+ et T^- .

Def. soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}_{n+1}$, l'hyperboloïde $\mathcal{K}_{x', \lambda}$, $x' \in \mathbb{R}_{n+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, d'équation $(x - x')^2 - \lambda^2 = 0$ est admissible pour Ω si l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}_{n+1} \mid (x - x')^2 \geq \lambda^2\}$ n'a pas de point commun avec Ω .

Si $\mathcal{K}_{x', \lambda}$ est admissible pour Ω , $\mathcal{K}_{x', \lambda}$ est admissible pour $B_P(\Omega)$, $P = \square_{n+1}$, lorsque Ω est P-régulier.

Def. $N(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs des paramètres (x', λ) correspondant à des hyperboloïdes admissibles

$$N(\Omega) = \bigcap_{x \in \Omega} \{(x', \lambda) \in \mathbb{R}_{n+2} \mid (x - x')^2 \leq \lambda^2\}.$$

Définissons deux fonctions $B^+(\vec{x}', \lambda)$ et $B^-(\vec{x}', \lambda)$ par :

$$B^+(\vec{x}', \lambda) = \sup_{x \in \Omega} (x_0 - \sqrt{|\vec{x} - \vec{x}'|^2 + \lambda^2})$$

$$B^-(\vec{x}', \lambda) = \inf_{x \in \Omega} (x_0 + \sqrt{|\vec{x} - \vec{x}'|^2 + \lambda^2}) ,$$

B^+ et B^- sont des fonctions continues et :

$$N(\Omega) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}_{n+2} \mid B^+(\vec{x}, \lambda) \leq x_0 \leq B^-(\vec{x}, \lambda)\}.$$

L'ensemble $N(\Omega)$ est fermé et $N(B_P(\Omega)) = N(\Omega)$ (si Ω est P-régulier).

Il se peut que $N(\Omega) = \emptyset$, par exemple si $\Omega = \{x \in \mathbb{R}_{n+1} \mid a < x_0 < x_1 < b, a < b\}$.

Def. soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}_{n+1}$, l'hyperplan $\mathcal{H}_{x', \lambda}$, $x' \in \mathbb{R}_{n+1}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{n+1}$, d'équation $\lambda \cdot (x - x') = 0$, est admissible pour Ω si $\lambda^2 \geq 0$ et si le demi espace $\lambda \cdot (x - x') \geq 0$ n'a pas de points communs avec Ω .

Def. $N_\infty(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs des paramètres (x', λ) correspondant à des hyperplans admissibles.

Comme précédemment $N_\infty(\Omega) = \bigcap_{x \in \Omega} \{(x', \lambda) \in \mathbb{R}_{2(n+1)} \mid \lambda \cdot (x - x') \leq 0, \lambda^2 \geq 0\}$. Les hyperplans admissibles correspondent à des hyperboloïdes admissibles dont le centre est à l'infini ; le paramètre λ correspondant à la direction du centre.

On suppose comme précédemment, que Ω est P-régulier.

Def.1 : si $N(\Omega) \neq \emptyset$ l'enveloppe $B(\Omega)$ est définie par :

$$\begin{aligned} B(\Omega) &= \text{intérieur} \bigcap_{(x', \lambda) \in N(\Omega)} \{x \in \mathbb{R}_{n+1} \mid (x - x')^2 < \lambda^2\} \\ &= \mathbb{R}_{n+1} \setminus \overline{\bigcup_{(x', \lambda) \in N(\Omega)} \{x \in \mathbb{R}_{n+1} \mid (x - x')^2 = \lambda^2\}} \quad . \end{aligned}$$

La caractérisation des ouverts Ω , P-réguliers, pour lesquels $N(\Omega) \neq \emptyset$ n'est pas aisée. En effet, il existe des ouverts Ω de rang 2 tels que $N(\Omega) = \emptyset$.

Cependant, si étant donné Ω , il existe* un compact K et un point $a \in K$ tel que le complémentaire de $\{a + \bar{V}\} \setminus K$ contienne $B_P(\Omega)$ (Fig. 1), alors $N(\Omega) \neq \emptyset$. En effet, les hyperboloïdes $\mathcal{H}_{a, \lambda}$ sont, pour λ assez grand, admissibles.

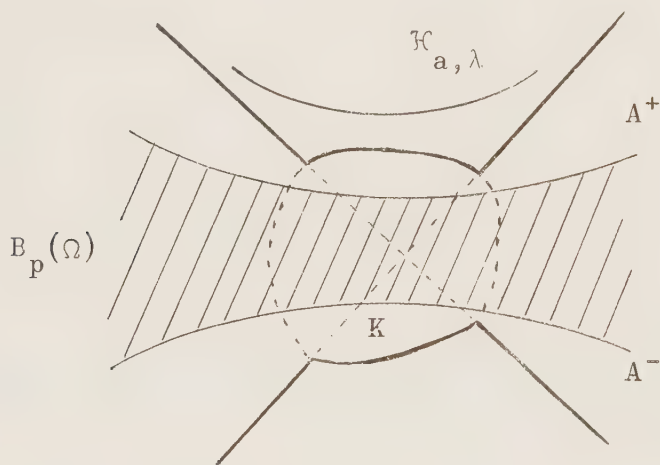


Fig. 1

Par contre, les ensembles Ω de rang 1 ou 0 sont tous tels que $N(\Omega) = \emptyset$, puisque $B_P(\Omega)$ comprend des points à l'infini dans les directions de genre temps.

* Cette condition est aussi nécessaire.

Lorsque $N(\Omega) = \emptyset$, on définit alors $B(\Omega)$ par :

Déf. 2 : si $N(\Omega) = \emptyset$,

$$B(\Omega) = \mathbb{R}_{n+1} \quad \text{si} \quad N_{\infty}(\Omega) = \emptyset,$$

$$B(\Omega) = \mathbb{R}_{n+1} \setminus \bigcup_{(x', \lambda) \in N_{\infty}(\Omega)} \overline{\{x \in \mathbb{R}_{n+1} \mid \lambda \cdot (x - x') \geq 0\}} = C(\Omega) \quad \text{si} \quad N_{\infty}(\Omega) \neq \emptyset,$$

$C(\Omega)$ est l'enveloppe convexe de Ω .

Nous verrons dans la suite que ces définitions de $B(\Omega)$ correspondent à un agrandissement de Ω obtenu par application du théorème du double cône et du principe de Huyghens.

3 - La représentation de Jost-Lehmann-Dyson

Nous donnons, sous ce titre, une représentation intégrale plus générale que celle initialement proposée par F.J. Dyson ([Dy 1]).

Soit donc $f \in \mathfrak{E}(\Omega)$; d'après le théorème de Gårding-Dyson, f peut s'écrire comme restriction à $\lambda = 0$ d'une solution de l'équation d'onde à $n+2$ dimensions. Or nous avons vu au chapitre précédent que pour toute surface fermée Σ strictement de genre espace, les solutions $u \in \mathcal{J}'$ de $\square u = 0$ peuvent s'écrire $u = D_* \phi$, où $\phi \in \mathcal{J}'$ et $\text{supp } \phi \subset \Sigma$. Une telle représentation sera intéressante pour les éléments de $\mathfrak{E}(\Omega)$ s'il est possible de relier les propriétés de support de ϕ aux caractéristiques de la région de nullité Ω .

Soit $u(x, \lambda)$ une solution paire de l'équation d'onde telle que $f(x) = u(x, \lambda) \Big|_{\lambda=0}$. Par hypothèse, $u(x, 0)$ est nulle dans Ω . D'après le théorème sur les segments de genre temps, $u(x, \lambda)$ est nulle dans $B_{\square_{n+2}}(\Omega)$ (que nous désignerons par $B_P(\Omega)$ dans la suite lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté).

On voit alors sans difficulté que

$$B_P(\Omega) = \{(x', \lambda) \in \mathbb{R}_{n+2} \mid B^-(\vec{x}', \lambda) < x'_0 < B^+(\vec{x}', \lambda)\},$$

les fonctions B^+ et B^- étant les mêmes que celles qui interviennent dans l'expression de $N(\Omega)$.

Suivant en cela V.S. Vladimirov nous dirons :

Def. un ouvert Ω de $\mathbb{R}_{n+1}$, $\square_{n+1}$ -régulier^{*} vérifie la condition (A) s'il existe une surface Σ strictement de genre espace qui soit contenue dans l'ensemble $B_P(\Omega) \cup N(\Omega)$.

S'il existe deux constantes θ et ρ , $0 < \theta < 1$ et $0 < \rho < 1$ et un nombre $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$|\theta B^+(\vec{x}, \lambda) + (1-\theta) B^-(\vec{x}, \lambda) - a| < \rho \sqrt{|\vec{x}|^2 + \lambda^2},$$

et si la surface Σ , d'équation $x_0 = \theta B^+ + (1-\theta) B^-$, est de genre espace, alors Σ est contenue dans $B_P(\Omega) \cup N(\Omega)$.

Il est d'ailleurs probable que si Ω est de rang 2 et si $N(\Omega) \neq \emptyset$, il existe une fonction continue réelle $\theta(\vec{x}, \lambda)$, comprise entre 0 et 1 et telle que la surface Σ , d'équation $x_0 = \theta B^+ + (1-\theta) B^-$, soit de genre espace et soit contenue dans $B_P(\Omega) \cup N(\Omega)$.

Supposons donc que Ω satisfasse la condition (A). La solution u s'écrit $u = D * \phi_\Sigma$; d'après l'expression de ϕ_Σ en fonction de u , nous voyons que puisque $\Sigma \subset B_P(\Omega)$ et que u est nulle dans $B_P(\Omega)$, $\text{supp } \phi_\Sigma \subset \Sigma \cap N(\Omega)$. D'où

Théorème : soit Ω un ouvert $\square_{n+1}$ -régulier, satisfaisant la condition (A) et soit $f \in \mathcal{G}(\Omega)$, alors :

$$f = D * \phi_\Sigma \Big|_{\lambda=0} \quad \phi_\Sigma \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}_{n+2}) \quad , \quad \text{supp } \phi \subset \Sigma \cap N(\Omega) \quad .$$

^{*} Si Ω est $\square_{n+1}$ -régulier, il est aussi $\square_{n+2}$ -régulier.

On obtient alors, pour $n=3$, après quelques manipulations formelles, la formule usuelle de la représentation de Dyson :

$$f(x) = \int_{N(\Omega)} \varepsilon(x_0 - x'_0) \delta((x - x')^2 - \lambda^2) \chi(x', \lambda^2) dx' d\lambda^2, \quad ,$$

avec $\chi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_5)$ et $\text{supp } \chi \subset N(\Omega)$.

Nous reviendrons ultérieurement sur cette représentation.

Lorsque $N(\Omega) = \emptyset$ et $N_\infty(\Omega) \neq \emptyset$ V.S. Vladimirov a donné la représentation suivante ([Vl 1]):

$$f(x) = \int_{N_\infty(\Omega)} \varepsilon(x_0 - x'_0) \delta(\lambda \cdot (x - x')) \chi(x', \lambda) dx' d\lambda.$$

4 - La nature quasi-analytique des solutions obtenues

Nous allons montrer que toute solution tempérée u de l'équation d'onde $\square_{n+2} u = 0$, dont la restriction $u(x, 0)$ au plan $\lambda = 0$ est nulle dans un ouvert $\Omega \in \mathbb{R}_{n+1}$, Ω étant P-régulier, est aussi nulle dans $B(\Omega)$.

Supposons d'abord $N(\Omega) \neq \emptyset$. On a vu que le théorème du double cône permettait d'agrandir Ω en $B_P(\Omega)$:

$$B_P(\Omega) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}_{n+2} \mid B^-(\vec{x}, \lambda) < x_0 < B^+(\vec{x}, \lambda)\}.$$

La restriction de $B_P(\Omega)$ à l'hyperplan $\lambda=0$ n'est pas le plus grand agrandissement possible de Ω . Nous allons compléter cette région en utilisant le principe de Huyghens et le fait que $\text{supp } \phi_\Sigma \subset \Sigma \cap N(\Omega)$.

La solution u est complètement déterminée par la donnée de ϕ_Σ .

Nous avons vu qu'un point $x \in H_+$ ne dépendait que des points de $\Sigma \cap \{x + \bar{V}^-\}$. Ceci équivaut à dire que chaque point σ de Σ a une "zone d'influence" donnée par $\sigma + \bar{V}$. Par suite $u(x, \lambda)$ est nulle en tout point

$$(x, \lambda) \notin \bigcup_{(x', \lambda') \in \Sigma \cap N(\Omega)} \overline{[(x', \lambda') + \bar{V}]}, \quad \text{donc en tout point}$$

$$(x, \lambda) \notin \overline{\bigcup_{(x', \lambda') \in \Sigma \cap N(\Omega)} \{(x, \lambda) | (x - x')^2 - (\lambda - \lambda')^2 \geq 0\}} \text{ et a fortiori si}$$

$$(x, \lambda) \notin \overline{\bigcup_{(x', \lambda') \in N(\Omega)} \{(x, \lambda) | (x - x')^2 - (\lambda - \lambda')^2 \geq 0\}}.$$

D'où $u(x, 0)$ est nulle dans $\mathbb{R}_{n+1} \setminus \overline{\bigcup_{(x', \lambda') \in N(\Omega)} \{(x, \lambda) | (x - x')^2 - \lambda'^2 \geq 0\}}$,
c'est-à-dire dans $B(\Omega)$.

Lorsque $N(\Omega) = \emptyset$, on construit à partir de Ω des ensembles Ω_α , $\Omega_\alpha = B_{\square_{n+1}}(\Omega) \cap \{x | |x_0| < \alpha\}$ convexes, donc P-réguliers et croissants.

D'après le lemme sur les limites inductives $B_{\square_{n+1}}(\Omega) = \bigcup_{\alpha} B_{\square_{n+1}}(\Omega_\alpha)$ avec $\alpha = 1, 2, \dots$. De même, les $N(\Omega_\alpha)$ étant fermés et décroissants $N(\Omega) = \bigcap_{\alpha} N(\Omega_\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} N(\Omega_\alpha)$.

En explicitant alors la définition de $B(\Omega)$, on a :

$$B(\Omega) = \mathbb{R}_{n+1} \setminus \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \overline{\bigcup_{(x', \lambda') \in N(\Omega_\alpha)} \{x \in \mathbb{R}_{n+1} | (x - x')^2 - \lambda'^2 \geq 0\}}.$$

On retrouve alors les deux cas de la définition 2. Ou la limite de l'union, quand $\alpha \rightarrow \infty$, existe et par définition vaut $N(\Omega)$ et comme $N(\Omega) = \emptyset$, $B(\Omega) = \mathbb{R}_{n+1}$, ou bien quand α croît, l'ensemble

$B_{\square_{n+1}}(\Omega) \cap \{x | |x_0| < \alpha\}$ part à l'infini dans des directions telles que l'une des branches des hyperboloïdes admissibles devient infinie. Ces hyperboloïdes deviennent alors des plans, et l'ensemble des paramètres correspondants est donné par $N_\infty(\Omega)$. On retrouve alors la seconde définition.

Finalement on peut énoncer le théorème suivant :

Théorème : soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}_{n+1}$, $\square$ -régulier et vérifiant la condition (A) ; si $f \in \mathfrak{C}(\Omega)$ alors $f \in \mathfrak{C}(B(\Omega))$.

5 - Fonctions analytiques liées à la représentation de Dyson

Ce paragraphe traite des fonctions de plusieurs variables complexes naturellement associées aux représentations de Dyson.

Nous exposons dans une première partie l'origine de ce problème et quelques résultats généraux dus à Vladimirov. Dans une seconde partie, nous restreignons la problème en particulierisant les régions de nullité Ω . Enfin un exemple, caractéristique pour le physicien, est traité explicitement.

Pour nous raccorder plus aisément à la littérature d'usage courant sur ce sujet en physique ([Om 1], [Dy 1], [Wi 1]), malencontreusement peut-être, nous allons modifier nos notations. Les éléments courants de $\mathcal{J}'(\bar{V})$ seront notés $\tilde{f}(x), \tilde{g}(y) \dots$ et leurs transformées de Fourier $f(p), g(p) \dots$.

1 - Soit $\tilde{f} \in \mathcal{J}'(\bar{V})$; comme $\bar{V}$ peut être décomposé en l'union $\bar{V}^+ \cup \bar{V}^-$ des deux ensembles réguliers $\bar{V}^+$ et $\bar{V}^-$, on peut écrire $\tilde{f} = \tilde{f}^+ - \tilde{f}^-$ avec $\tilde{f}^\pm \in \mathcal{J}'(\bar{V}^\pm)$. Cette décomposition n'est pas unique, elle est déterminée à un élément près de $\mathcal{J}'(\bar{V}^+ \cap \bar{V}^-)$, c'est-à-dire dans ce cas à une distribution de la forme $\sum_{|\alpha| \leq m} C_\alpha D^\alpha \delta(x)$ près. Considérons alors la transformée de Laplace de $\tilde{f}^+$ (resp. $\tilde{f}^-$), soit $f^+(p)$ (resp. $f^-(p)$). Elle est analytique dans le tube $T^+ = \mathbb{R}_{n+1} + iV^+$ (resp. $T^- = \mathbb{R}_{n+1} + iV^-$). De plus la transformée de Fourier f^+ de $\tilde{f}^+$ (resp. f^- de $\tilde{f}^-$) est la valeur au bord de $f^+(p)$ dans T^+ (resp. de $f^-(p)$ dans T^-) (voir essentiellement [St 1]). Si en plus $f \in \mathcal{E}(\Omega)$ ceci signifie que les valeurs au bord f^+ et f^- coïncident sur Ω . En appliquant alors le théorème de l'Edge of the Wedge ([Ep 1 et 2], [St 1], [Vl 1]), on voit qu'il existe une fonction $F(p)$ analytique dans $T^+ \cup T^- \cup v(\Omega)$ où $v(\Omega)$ est un voisinage complexe de Ω . La fonction $F(p)$ coïncide avec $f^+(p)$ dans T^+ et avec $f^-(p)$ dans T^- ; elle est déterminée à un polynôme arbitraire près.

Deux problèmes apparaissent naturellement :

- a) trouver une représentation intégrale pour $F(p)$,
- b) comme $T^+ \cup T^- \cup v(\Omega)$ n'est pas un domaine d'holomorphie, déterminer l'enveloppe d'holomorphie de $T^+ \cup T^- \cup v(\Omega)$. V.S. Vladimirov donne dans son livre [VI 1] une solution du premier problème, solution que nous exposons brièvement dans ce qui suit.

D'après le théorème de Gårding-Dyson, f peut s'écrire comme restriction à l'hyperplan $p_{n+1} = 0$ d'une solution tempérée u de l'équation $\square_{n+2} u = 0$. D'autre part, nous avons vu que si Σ est une surface strictement de genre espace, alors u s'écrit $u = D * \phi_\Sigma$. Or la solution élémentaire D peut elle-même s'écrire comme différence des valeurs au bord d'une fonction $(-p^2)^{-n/2}$ analytique dans $T^+ \cup T^-$:

$$\begin{aligned} D(p) &= \frac{1}{2in} \pi^{-\frac{n+2}{2}} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) \{ (|\vec{p}|^2 - (p_0 + io)^2)^{-n/2} - (|\vec{p}|^2 - (p_0 - io)^2)^{-n/2} \} \\ &= D^+(p) - D^-(p) \end{aligned}$$

Enfin, $\tilde{D}^\pm(x)$ est essentiellement égal à $\pm \theta(\pm x_0) \tilde{D}(x)$. Comme les convolutions $u^+ = D^+ * \phi_\Sigma$ et $u^- = D^- * \phi_\Sigma$ ont un sens, on pourrait s'attendre

à ce que $\int [-(p-p')^2]^{-n/2} \phi_\Sigma(p') dp' \Big|_{p_{n+1}=0}$ soit la fonction analy-

tique $F(p)$ que nous cherchons à obtenir. Nous allons voir dans la suite que ce n'est généralement pas le cas. En effet, revenons au sens qu'il faut donner à la convolution de $D * \phi_\Sigma$.

Pour tout $\varphi \in \mathcal{J}$, on définit $D * \phi_\Sigma$ par :

$$(D * \phi_\Sigma)(\varphi) = \phi_\Sigma(D * \varphi) \quad .$$

Comme le support de ϕ_Σ est contenu dans un ensemble régulier Σ , ϕ_Σ s'étend en une fonctionnelle linéaire continue sur l'espace de Banach

muni de la norme $\|\cdot\|_{m,\Sigma}$, m dépendant de l'ordre de ϕ_Σ , et c'est au sens de cette topologie que doit se comprendre la formule précédente. Le lemme suivant dû à Vladimirov éclaire alors le problème :

Lemme : soit Σ une surface de genre espace, telle que $-\infty < a \leq p_0 \leq b < +\infty$ pour tout point $p \in \Sigma$. Alors pour chaque valeur de m , $m \geq 0$, il existe un nombre $s = s(m)$, $s \geq 0$ tel que pour $|1| \geq s$

$$1) \quad \|D^1[-(p-p')^2]^{-\frac{n}{2}}\|_{m,\Sigma} \leq K_{C,1} (1+|p|)^\beta (1+|\operatorname{Im} p_0|^{-\alpha}) \quad ,$$

quelque soit $\operatorname{Im} p \in C$, C un cône quelconque contenu dans V ; $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$ ne dépendant pas de ce cône.

$$2) \quad \|D^1(-p^2)^{-n/2} * \varphi - D^1[|\vec{p}|^2 - (p_0 \pm i0)^2]^{-n/2} * \varphi\|_{m,\Sigma} \rightarrow 0 \quad ,$$

pour $\operatorname{Im} p \rightarrow 0$, $\operatorname{Im} p \in V^\pm$.

Ces résultats montrent que $\int D^1[-(p-p')^2]^{-\frac{n}{2}} \phi_\Sigma(p') dp' = F_{(1)}(p)$ est une fonction analytique admettant des valeurs au bord qui sont des distributions tempérées pour autant que $|1| \geq s$.

V.S. Vladimirov montre ensuite comment à partir de $F_{(1)}(p)$ il est possible par intégration successive de construire une fonction $F(p)$ analytique dans $T^+ \cup T^-$ et dont la différence des valeurs au bord est u . Toutefois nous n'obtenons de représentation intégrale simple que pour des dérivées d'un ordre suffisamment élevé de $F(p)$. Nous allons voir dans ce qui suit que si nous imposons des conditions supplémentaires sur Ω (qui n'a joué aucun rôle jusqu'à présent), il est alors possible de choisir Σ et par conséquent ϕ_Σ de façon à obtenir une réponse satisfaisante aux questions a) et b).

* Soit $\varphi \in C^{(m)}(\mathbb{R}_n)$, $\|\varphi\|_{m,\Sigma} = \sup_{p \in \Sigma, |\alpha| \leq m} (1+|p|)^m |D^\alpha \varphi(p)|$

où $D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial p_1})^{\alpha_0} \dots (\frac{\partial}{\partial p_n})^{\alpha_n}$ et $|\alpha| = \sum_1^n \alpha_i$.

- 2 - Nous supposons dans ce qui suit $n=3$; cette restriction ne nuisant en rien à la généralité des résultats.

Def. soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}_4$, Ω vérifie la condition (B) si :

$$1) \quad \Omega = \{p \in \mathbb{R}_4 \mid f(\vec{p}) < p_0 < g(\vec{p})\} \quad ,$$

$f(\vec{p})$ et $g(\vec{p})$ étant des fonctions continues de $\vec{p}$.

2) Ω est $\square$ -régulier.

3) Il existe deux quadrivecteurs a et $b \in \mathbb{R}_4$, $a \geq b$ tels que le complémentaire de Ω soit contenu dans l'ensemble $\{a + \bar{V}^-\} \cup \{b + \bar{V}^+\}$ (voir Fig. 1).

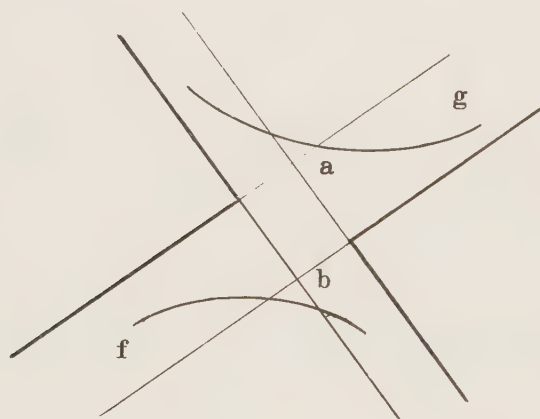


Fig. 1

On notera dorénavant par $\mathcal{R}$ les ouverts de $\mathbb{R}_4$ vérifiant la condition (B).

On voit sans difficulté que

$$N(\mathcal{R}) \subset \{(p, \lambda) \mid p \in \{a + \bar{V}^-\} \cap \{b + \bar{V}^+\}, \lambda \text{ réel}\} \quad ,$$

et donc $N(\mathcal{R})$ est borné en p .

Remarque : les régions de nullité qui apparaissent en physique lors de l'étude du commutateur de deux champs sont du type $\mathcal{R}$.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$, f s'écrit :

$$f(p) = D_5(p, \lambda) * \phi_\Sigma(p, \lambda) \Big|_{\lambda=0} \quad p \in \mathbb{R}_4, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

avec $\phi_\Sigma \in \mathcal{J}'(\mathbb{R}_5)$, $\text{supp } \phi_\Sigma \subset N \cap (\mathcal{R})$.

Puisque $N(\mathcal{R})$ est borné en p et que ϕ_Σ est tempérée on peut écrire d'après L. Schwartz ([Sc 1])

$$\phi_\Sigma(p, \lambda) = \varphi_\Sigma(p, \lambda) (\lambda^2 + \sigma^2)^r,$$

où $\varphi_\Sigma(p, \lambda)$ est une distribution bornée, σ et r , $r \geq 0$ deux nombres dépendants de ϕ_Σ .

Lemme : quelque soit l'entier n positif ou nul, la fonction $F_{(n)}(p)$ donnée par :

$$F_{(n)}(p) = \int_{\Sigma \cap N(\mathcal{R})} \left\{ (-i \frac{\partial}{\partial p_0})^n \left(\frac{((p-p')^2 + \sigma^2)^r}{(\lambda^2 - (p-p')^2)^{3/2}} \right) \right\} \varphi_\Sigma(p', \lambda) d^4 p' d\lambda,$$

est analytique dans un domaine contenant $\mathcal{R} \cup T^+ \cup T^-$. De plus $F_{(n)}(p)$ admet pour valeurs au bord les distributions tempérées

$$(-i \frac{\partial}{\partial p_0})^n f^\pm \quad \text{où}$$

$$f^\pm(p) = [(p^2 + \sigma^2)^r D_5^\pm(p, \lambda)] * \varphi_\Sigma(p, \lambda) \Big|_{\lambda=0}.$$

Dem. Nous devons démontrer les deux relations suivantes, où nous avons remplacé $(-i D_0)^n$ par D^1 :

$$1) \quad \int_{\Sigma \cap N(\mathcal{R})} |D^1 \left(\frac{((p-p')^2 + \sigma^2)^r}{(\lambda^2 - (p-p')^2)^{3/2}} \right)| d^4 p' d\lambda \leq C(1 + |p|)^\beta (1 + |\text{Imp}_0|^{-\alpha}),$$

quelque soit l et Imp tel que $|\text{Imp}_0| \geq \eta |\vec{\text{Im}}_p|$, $\eta > 1$, C ne dépendant que de η et l .

2) Quelque soit $\varphi \in \mathcal{F}$, en posant $R_1(p, \lambda) = D^1 \left(\frac{(p^2 + \sigma^2)^r}{(\lambda^2 - p^2)^{3/2}} \right)$

$$\int_{\Sigma \cap N(\mathcal{R})} |R_1(\text{Rep} + i \text{Imp}, \lambda) * \varphi(\text{Rep}) - R_1(\text{Rep} + i0, \lambda) * \varphi(\text{Rep})| d^4 p' d\lambda$$

tend vers zéro lorsque $\text{Imp} \in V^\pm$ tend vers zéro.

La condition 1) implique l'existence d'une valeur en bord. La condition 2) précise cette valeur au bord. Ces deux conditions suffisent pour prouver le lemme, en effet, comme φ_Σ est une distribution bornée, elles expriment dans la topologie de $\mathcal{D}'_{L^\infty}$, le dual de $\mathcal{D}_{L^1}$, (topologie plus fine que celle de $\mathcal{F}'$) l'existence de valeurs au bord et la convergence vers ces valeurs au bord. Nous verrons que l'analyticité s'en déduit simplement.

Nous ne montrerons que l'inégalité (1), la condition (2) se prouvant de façon identique.

Remarquons d'abord que :

$$\lambda^2 - (p - p')^2 \neq 0 \quad \text{pour} \quad p \in T = T^+ \cup T^-, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad p' \in \mathbb{R}_4,$$

et donc que :

$$(\lambda^2 - (p - p')^2)^{-3/2} \quad \text{est une fonction } C^\infty \text{ de } p' \text{ pour } p \in T.$$

Ecrivons ensuite pour $p \in T^+$ (le cas $p \in T^-$ étant identique) :

$$|R_1(p - p', \lambda)| = |R_1(p - p', \lambda)(\lambda^2 + a^2)^{3/2}| (\lambda^2 + a^2)^{-3/2},$$

a étant une constante arbitraire différente de zéro.

Comme l'intégration en p' est bornée et que $\int (\lambda^2 + a^2)^{-3/2} d\lambda$ est fini, il suffit de montrer que pour tout compact K de $\mathbb{R}_4$

$$\sup_{\lambda, p' \in K} |R_1(p-p', \lambda)(\lambda^2 + a^2)^{3/2}| < C(1 + |p|)^\beta (1 + |\text{Imp}_0|^{-\alpha})$$

Or $R_1(p-p', \lambda)$ s'écrit comme somme finie de termes de la forme

$P_k(p-p', \sigma) D^k[(\lambda^2 - (p-p')^2)]^{-3/2}$ où les P_k sont des polynômes en $(p_i - p'_i)$, $i = 0, 1, 2, 3$, et en σ de degré $k \leq 1$.

Etant donné P_k , il existe un nombre $r_k \geq 0$ tel que

$$\sup_{p' \in K} |P_k(p-p', \sigma)| < C_1 (1 + |p|)^{r_k}.$$

Nous sommes donc amenés à trouver une majoration de la quantité I donnée par :

$$I = \sup_{p' \in K, \lambda} |D^k[\lambda^2 - (p-p')^2]^{-3/2} (\lambda^2 + a^2)^{3/2}|$$

Pour cela nous nous servons de ce que D_5^+ est essentiellement la transformée de Fourier de $\theta(x_0) \delta(x^2 - s^2)$ et on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \sup_{\lambda, p' \in K} |D^k C_2 \left(\int \theta(x_0) \delta(x^2 - s^2) e^{i(p-p') \cdot x} e^{-i\lambda s} d^4 x ds \right) (\lambda^2 + a^2)^{3/2}| \\ &= \sup |C_2 \left(\int \theta(x_0) \delta(x^2 - s^2) x_0^{k_0} \dots x_3^{k_3} e^{i(p-p') \cdot x} e^{-i\lambda s} d^4 x ds \right) (\lambda^2 + a^2)^{3/2}| \\ &= \sup |C_2 \left(\int |u|^{k_0-1} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} e^{i(p_0-p'_0)|u|} e^{-i(p-\vec{p}') \cdot \vec{x}} \left(a^2 - \frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)^{3/2} e^{i\lambda s} d^3 x ds \right)| \end{aligned}$$

$$\text{où } |u|^2 = \vec{x}^2 + s^2.$$

Pour tout $p \in T^+$ on obtient en intégrant par partie

$$I \leq \sup |C_3 (1 + |p|)^{3/2} \int |u|^q e^{-\text{Imp}_0 |u|} e^{\vec{\text{Imp}} \cdot \vec{x}} d^3 x ds|$$

Comme $\text{Imp}_0 \geq \eta |\vec{\text{Imp}}|$, il existe deux constantes C_4 et α telles que :

$$I < C_4 (1 + |p|)^{3/2} (1 + |\text{Imp}_0|^{-\alpha})$$

On obtient alors l'inégalité 1) avec $\beta = 3/2 + \sup r_k$.

L'analyticité résulte immédiatement de ce résultat. En effet, en appliquant l'inégalité 1) on a que :

$$\int \left| \frac{\partial}{\partial p_i} R_1(p - p', \lambda) - \frac{1}{\Delta p_i} (R_1(p + \Delta p_i - p', \lambda) - R_1(p - p', \lambda)) \right| d^4 p' d\lambda \rightarrow 0 ,$$

pour $i = 0, 1, 2, 3$ uniformément par rapport à tout p situé dans un compact de T . La fonction $F_{(1)}(p)$ a donc des dérivées du premier ordre et ces dérivées sont obtenues par dérivation sans le signe somme. Le théorème d'Hartogs ([Hö 2], [Wi 1], [Vl 1]) permet alors d'affirmer que $F_{(1)}(p)$ est analytique dans T . La condition 1) exprime donc que $F_{(1)}(p)$ a des valeurs au bord, et la condition 2) que ces valeurs au bord sont $(-i \frac{\partial}{\partial p_0})^n f^\pm$. D'autre part :

$$\begin{aligned} f^+ - f^- &= [(p^2 + \sigma^2)^r (D_5^+(p, \lambda) - D_5^-(p, \lambda))] * \varphi_\Sigma(p, \lambda) \Big|_{\lambda=0} \\ &= D_5(p, \lambda) * \varphi_\Sigma(p, \lambda) \Big|_{\lambda=0} . \end{aligned}$$

La fonction analytique $F_{(0)}(p)$ dont la différence des valeurs au bord est f est donc bien, à un polynôme arbitraire près, la fonction analytique $F(p)$ dont l'existence découle du théorème de l'Edge of the Wedge. Nous avons vu qu'elle était analytique dans T , on vérifie sans peine d'après les conditions de support de φ_Σ donc de φ_Σ , qu'elle est analytique sur $\mathcal{R}$. D'où le théorème suivant :

Théorème : soit $f \in \mathcal{S}(\mathcal{R})$, la fonction

$$F(p) = \int_{\Sigma \cap N(\mathcal{R})} \frac{((p - p')^2 + \sigma^2)^r}{(\lambda^2 - (p - p')^2)^{3/2}} \varphi_\Sigma(p', \lambda) d^4 p' d\lambda ,$$

où r et φ_Σ dépendent de f , φ_Σ étant une distribution bornée en p' , est analytique pour $p \in T^+ \cup T^- \cup v(\mathcal{R})$. La différence de ses valeurs au bord est égale à f . On doit comprendre l'intégrale comme l'action de la fonction d'essai $\frac{((p - p')^2 + \sigma^2)^r}{(\lambda^2 - (p - p')^2)^{3/2}}$ sur la distribution φ_Σ .

On peut évidemment obtenir un résultat identique en partant de la représentation, utilisée couramment par les physiciens et que nous avons donnée sans démonstration au paragraphe 3) c'est-à-dire :

$$f(p) = \int_{N(\mathcal{R})} \varepsilon(p_0 - p'_0) \delta((p - p')^2 - \lambda^2) \chi(p', \lambda) d^4 p' d\lambda^2.$$

La fonction analytique associée est :

$$F(p) = \int_{N(\mathcal{R})} \frac{((p - p')^2 + \sigma^2)^r}{(p - p')^2 \lambda^2} \frac{\chi(p', \lambda^2)}{(\lambda^2 + \sigma^2)^r} d^4 p' d\lambda^2.$$

Le théorème précédent s'applique sans changement.

Nous allons maintenant justifier l'introduction des $F_{(n)}(p)$.

Considérons en effet $\tilde{f}(x)$; c'est une distribution tempérée dont le support est dans $\bar{V}$; elle est généralement singulière en $x_0=0$ (c'est-à-dire que $\tilde{f}(x)$ n'est pas C^∞ dans un voisinage de $x_0=0$). Mais comme elle est d'ordre fini, il existe un n tel que $(x_0)^n \tilde{f}(x)$ soit régulière en 0. On peut donc multiplier $(x_0)^n \tilde{f}(x)$ par $\theta(\pm x_0)$ et on définit ainsi deux distributions tempérées $\tilde{g}^+(x) = \theta(x_0)(x_0^n \tilde{f}(x))$ et $\tilde{g}^-(x) = -\theta(-x_0)(x_0^n \tilde{f}(x))$ avec $\tilde{g}^+(x) - \tilde{g}^-(x) = \tilde{g}(x) = x_0^n \tilde{f}(x)$. $\tilde{g}^+, \tilde{g}^-$ et $\tilde{g}$ ont les mêmes propriétés de support en x que $\tilde{f}^+, \tilde{f}^-$ et $\tilde{f}$ et $\tilde{g}^+$ et $\tilde{g}^-$ coïncident dans une région qui contient $\mathcal{R}$. On peut alors voir sans difficultés que pour n assez grand (dépendant de l'ordre de ϕ , c'est-à-dire de r) $F_{(n)}(p)$ admet pour valeurs au bord respectivement les transformées de Fourier $\tilde{g}^+$ et $\tilde{g}^-$.

3 - Notre propos est, en traitant explicitement un exemple, de justifier la "représentation pour physiciens".

A titre d'exemple, nous allons traiter le cas où $\mathcal{R}$ est bordé par les deux surfaces de genre espace

$$p_0 = a - \sqrt{p^2 + m^2} \quad p_0 = -a + \sqrt{p^2 + m^2} \quad a \text{ et } m \text{ étant}$$

des constantes,

$$\text{donc } \mathcal{R} = \{p \in \mathbb{R}_4 \mid a - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} < p_0 < -a + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}\}.$$

Les quantités B^+ et B^- sont données par :

$$B^+(\vec{p}, \lambda) = -B^-(\vec{p}, \lambda) \quad \text{et} \quad B^+(\vec{p}, \lambda) = \begin{cases} \sqrt{\vec{p}^2 + (m - \lambda)^2} - a & |\lambda| \leq m \\ |\vec{p}| - a & |\lambda| \geq m \end{cases}.$$

La région des paramètres des hyperboloïdes admissibles $N(\Omega)$ est donnée par : $N(\mathcal{R}) = \{(p, \lambda) \in \mathbb{R}_5 \mid B^+(\vec{p}, \lambda) \leq p_0 \leq B^-(\vec{p}, \lambda)\}.$

On voit alors sans peine que dans $N(\mathcal{R})$:

$$|\vec{p}| \leq a \quad \text{et} \quad |\lambda| \geq \max(0, m - \sqrt{a^2 - |\vec{p}|^2}).$$

La symétrie des données par rapport à l'hyperplan $p_0 = 0$, permet de choisir $p_0 = 0$ pour surface Σ . On a donc $f(p) = u(p, 0) = D_5 * \phi \big|_{\sigma=0}$

où D_5 est la solution particulière de l'équation d'onde à 5 dimensions (en p et en σ) et ϕ est donnée par :

$$\phi(p, \lambda) = \frac{\partial}{\partial p_0} (\delta(p_0) u(p, \lambda)) + \delta(p_0) \frac{\partial}{\partial p_0} u(p, \lambda).$$

Nous allons transformer l'expression de $f(p)$ en effectuant un certain nombre de manipulations formelles qui peuvent être justifiées.

Considérons :

$$\begin{aligned} D_5 * \phi \big|_{\sigma=0} &= \int D(p - p', \lambda) \phi(p', \lambda) \\ &= \int D_5(p - p', \lambda) \left(\frac{\partial}{\partial p'_0} (\delta(p'_0) u(p', \lambda)) + \delta(p'_0) \frac{\partial}{\partial p'_0} u(p', \lambda) \right) \\ &= \int \left(\frac{\partial}{\partial p_0} D_5(p - p', \lambda) \right) \delta(p'_0) u(p', \lambda) + \int D_5(p - p', \lambda) \delta(p'_0) \frac{\partial}{\partial p'_0} u(p', \lambda). \end{aligned}$$

L'expression obtenue ne peut plus alors être facilement transformée, ceci est dû essentiellement à ce que le support de D_5 n'est pas localisé

au bord du cône de lumière (phénomène de queue pour les ondes impaires) aussi passerons-nous à D_6 ; on a entre D_5 et D_6 la relation formelle suivante :

$$D_5(p, \lambda) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} D_6(p, \lambda, \mu) d\mu.$$

L'avantage de D_6 vient de ce que $D_6(p, \lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi^2} \varepsilon(p_0) \delta^{(1)}(p^2 - \lambda^2 - \mu^2)$

et on peut écrire que :

$$D_5(p, \lambda) = \frac{1}{\pi} \varepsilon(p_0) \int_{\lambda^2}^{\infty} \delta'(p^2 - s) \frac{ds}{\sqrt{s - \lambda^2}},$$

où on a posé $\lambda^2 + \mu^2 = s$.

On a alors

$$\frac{\partial}{\partial p_0} D_5(p, \lambda) = -\frac{2}{\pi} \varepsilon(p_0) p_0 \int_{\lambda^2}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s - \lambda^2}} (\delta'(p^2 - s)) ds.$$

D'où en se servant de la symétrie en λ

$$\begin{aligned} f(p) &= \frac{2}{\pi} \varepsilon(p_0) \int_{\lambda_{\min}}^{\infty} d\lambda d\vec{p}' \frac{\partial}{\partial p'_0} u(p', \lambda) \Big|_{p'_0=0} \int_{\lambda^2}^{\infty} \delta'((p - p')^2 - s) \frac{ds}{\sqrt{s - \lambda^2}} \\ &\quad - \frac{4}{\pi} \varepsilon(p_0) p_0 \int_{\lambda_{\min}}^{\infty} d\lambda d\vec{p}' u(p', \lambda) \Big|_{p'_0=0} \int_{\lambda^2}^{\infty} \left(\frac{d}{ds} \delta'((p - p')^2 - s) \right) \frac{ds}{\sqrt{s - \lambda^2}}, \end{aligned}$$

$$\text{avec } \lambda_{\min} = \max(0, m - \sqrt{a^2 - |\vec{p}|^2}).$$

Alors en intégrant par partie en s après avoir interverti les intégrations en λ et s et observé que $\delta'(p^2 - s) = -\frac{d}{ds} (\delta(p^2 - s))$, on obtient:

$$\begin{aligned} f(p) &= \varepsilon(p_0) \int d\vec{p}' \int_{\lambda_{\min}}^{\infty} ds \delta((p - p')^2 - s) \left\{ \frac{d}{ds} \int_{\lambda_{\min}}^{\sqrt{s}} \frac{d\lambda}{\sqrt{s - \lambda^2}} \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial p'_0} u(p', \lambda) \Big|_{p'_0=0} \right. \\ &\quad \left. + p_0 \frac{d^2}{ds^2} \int_{\lambda_{\min}}^{\sqrt{s}} \frac{d\lambda}{\sqrt{s - \lambda^2}} \frac{4}{\pi} u(p', \lambda) \Big|_{p'_0=0} \right\}, \end{aligned}$$

et en posant $\Phi_1(p', s) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{ds} \int_{\lambda_{\min}}^{\sqrt{s}} \frac{d\lambda}{\sqrt{s-\lambda^2}} \frac{\partial}{\partial p'_0} u(p', \lambda) \Big|_{p'_0=0}$

$$\Phi_2(p', s) = \frac{4}{\pi} \frac{d^2}{ds^2} \int_{\lambda_{\min}}^{\sqrt{s}} \frac{d\lambda}{\sqrt{s-\lambda^2}} u(p', \lambda) \Big|_{p'_0=0} ,$$

et en interchangeant les intégrations en $\vec{p}'$ et s on trouve la formule de Jost-Lehmann ([Jo 1]) :

$$f(p) = \int_0^\infty ds \int d\vec{p}' \varepsilon(p_0) \delta(p_0^2 - (\vec{p} - \vec{p}')^2 - s) [\Phi_1(p', s) + p_0 \Phi_2(p', s)] .$$

Si $\Phi_2(p', s)$ est nulle, on obtient alors, en transformée de Fourier, la formule usuelle :

$$\tilde{f}(x) = \int_0^\infty \Delta(x; s) \tilde{\Phi}_1(x; s) ds .$$

6 - Domaine d'analyticité associé à la représentation de Dyson

Nous avons vu dans la paragraphe précédent qu'il était possible d'associer à tout élément $f \in \mathfrak{E}(\mathcal{R})$ des fonctions analytiques $F_{(n)}(p)$ données par exemple par :

$$F_{(n)}(p) = \int_{\Sigma \cap N(\mathcal{R})} \left\{ (-i \frac{\partial}{\partial p'_0})^n \left(\frac{((p-p')^2 + \sigma^2)^r}{(\lambda^2 - (p-p')^2)^{3/2}} \right) \frac{\phi_\Sigma(p', \lambda)}{(\lambda^2 + \sigma^2)^r} dp' d\lambda \right.$$

Les propriétés d'analyticité ne dépendant pas de l'ordre de dérivation, nous traiterons le cas $n = 0$.

Nous allons montrer que $F(p)$ est analytique en tout point $p \in \mathbb{E}_4$ tel que, quelques soient $(\lambda, p') \in N(\mathcal{R})$, $\lambda^2 - (p-p')^2 \neq 0$.

Soient $p \in \mathbb{E}_4$ et $v(p)$ un voisinage complexe de ce point, tels que $\lambda^2 - (p-p')^2 \neq 0$ pour $p \in v(p)$ et $(\lambda, p') \in N(\mathcal{R})$.

La fonction $(\lambda^2 - (p-p')^2)^{-3/2}$ est donc analytique dans $v(p)$.

On applique alors la formule de Cauchy à la fonction analytique

$((p - p')^2 + \sigma^2)^r (\lambda^2 - (p - p')^2)^{-3/2}$ pour un polydisque contenu dans $v(p)$ et centré en p . La méthode que nous avons employée pour démontrer l'analyticité de $F(p)$ (c'est-à-dire l'utilisation du fait que $\phi_{\Sigma}(p', \lambda) (\lambda^2 + \sigma^2)^{-r}$ est bornée) montre alors que :

- a) l'intégrale totale existe,
- b) les dérivées $\frac{\partial F}{\partial p_i}(p)$ $i = 0, 1, 2, 3$ existent,
- c) les dérivées $\frac{\partial F}{\partial p_i}(p)$ sont égales aux fonctions obtenues en

dérivant sous le signe somme.

En appliquant alors le théorème d'Hartogs, on trouve donc que $F(p)$ est analytique en tout point $p \in \mathbb{E}_4$ tel que $\lambda^2 \neq (p - p')^2$ quelques soient $(\lambda, p') \in N(\mathcal{R})$. Il résulte immédiatement de la définition de $N(\mathcal{R})$ que le domaine d'analyticité $D(\mathcal{R})$ que nous venons de définir contient $B(\mathcal{R})$. Plus précisément on voit que la partie réelle de $D(\mathcal{R})$ est exactement $B(\mathcal{R})$. Comme il est d'autre part évident que $\lambda^2 \neq (p - p')^2$ pour $p \in T^+ \cup T^-$, on obtient $D(\mathcal{R}) \supset T^+ \cup T^- \cup B(\mathcal{R})$.

J. Bros, A. Messiah et R. Stora ([Br 1]) ont montré que si $\mathcal{R}$ est délimité par des surfaces de genre espace (dans ce cas $B(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$) alors $D(\mathcal{R})$ est l'enveloppe d'holomorphie de $T^+ \cup T^- \cup v(\mathcal{R})$ où $v(\mathcal{R})$ est un voisinage complexe de $\mathcal{R}$.

Remarquons que, comme la quasi-analyticité complète automatiquement $\mathcal{R}$ en $B(\mathcal{R})$, il suffit pour obtenir ce résultat (avec $\mathcal{R}$ remplacé par $B(\mathcal{R})$) de supposer que $B(\mathcal{R})$ soit délimité par des surfaces de genre espace. Dans le cas traité par J. Bros, A. Messiah et R. Stora, l'enveloppe d'holomorphie $H(T^+ \cup T^- \cup v(\mathcal{R}))$ est donnée par :

$$H(T^+ \cup T^- \cup v(\mathcal{R})) = \mathbb{E}_4 \setminus \overline{\bigcup_{(p', \lambda) \in N(\mathcal{R})} [p \in \mathbb{E}_4 \mid (p - p')^2 = \lambda^2]} .$$

Nous renvoyons au cours des Houches ([Wi 1] et [Om 1]), à l'article de J. Bros, A. Messiah et R. Stora ([Br 1]) et à l'article de J. Bros, C. Itzykson et F. Pham ([Br 2]) pour une description plus complète de l'enveloppe d'holomorphie.

D E U X I E M E P A R T I E .

GENERALISATION DE LA FORMULE DE DYSON

INTRODUCTION

L'article qui suit donne la démonstration d'une représentation intégrale analogue à la formule de Dyson dans la cas où le support dans l'espace des x n'est plus le cône de lumière mais une union de translatés du cône de lumière.

Les propriétés analytiques sont les mêmes et donc le noyau de la représentation intégrale reste inchangé. Par contre, la nouvelle condition de support aura pour conséquence une modification de la croissance dans les tubes T^+ et T^- , modification qu'on pourra lire explicitement sur la formule que nous obtiendrons.

A Generalization of Dyson's Formula

ROLAND SÉNÉOR

Centre de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique, Paris

Received July 22, 1968

Abstract. We give an integral representation for tempered distributions which have more general support properties in x space, than those usually assumed in the derivation of the Dyson formula.

The existence of such an integral representation is shown to be equivalent to that of a suitable extension of an analytic function: namely, given an analytic function on a section Ω of a domain of holomorphy Ω' extend it to Ω imposing on it some growth conditions.

L^2 space methods of L. HÖRMANDER are used to solve this problem of extension. In order to apply these Hilbert space techniques, it was necessary to prove two important theorems on the growth of analytic function.

From the physical point of view the formula we obtained is an integral representation for the commutator of two quasi local fields.

Introduction

Let us consider the Fourier transform of the commutator of two operators in the Haag Araki theory:

$$f(p) = \int e^{i(p,x)} \left\langle \Omega \left| \left[A\left(\frac{x}{2}\right), B\left(-\frac{x}{2}\right) \right] \Omega \right\rangle d^4x. \quad (0)$$

In the above formula, A and B are local observables contained respectively in the von Neuman algebras $R(\mathcal{B}_A)$ and $R(\mathcal{B}_B)$.

$$A(x) = U(x) A U(-x)$$

$$B(x) = U(x) B U(-x)$$

$$U(x) = e^{i(P,x)},$$

P is the energy momentum operator [4], the scalar product (p, x) means $p_0x_0 - p_1x_1 - p_2x_2 - p_3x_3$, and Ω is the vacuum state.

The tempered distribution f has the following properties:

a) its support is contained outside a region $\mathcal{R}$ which is roughly bounded by two spacelike surface (for a precise description look at Refs. [0, 1, 2] and especially pages 323—325 of Ref. [5]).

b) According to the causality condition, its Fourier transform vanishes on the set¹:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}_4 \left| \frac{x}{2} + \mathcal{B}_A \sim -\frac{x}{2} + \mathcal{B}_B \right. \right\}.$$

¹ Let S and T be sets in $\mathbb{R}_n$, then $S + T = \{x \in \mathbb{R}_n | x = s + t; s \in S, t \in T\}$ for any $x, y \in \mathbb{R}_4$

$x \sim y$ means $(x - y)^2 = (x_0 - y_0)^2 - (x_1 - y_1)^2 - (x_2 - y_2)^2 - (x_3 - y_3)^2 \leq 0$.

Conditions a) and b) are close to those encountered in the Jost-Lehman-Dyson representation [1, 2]. On the latter case, indeed, condition a) does not change and condition b) simplifies (one asks for the nullity outside the light cone).

Our purpose is to extend the Jost-Lehman-Dyson representation to tempered distributions which have properties similar to a) and b).

First we modify slightly condition b). Since A and B are local observables $\mathcal{B}_B - \mathcal{B}_A$ is a bound set in $\mathbb{R}_4$.

$$\text{Define}^2 \text{ then } W(\alpha, \beta) = \overline{\{x \in \mathbb{R}_4 | x \in V_\alpha^- \cap V_\beta^+\}} \quad \text{for } \alpha > \beta$$

$$D(\alpha, \beta) = \overline{\{x \in \mathbb{R}_4 | x \in V_\alpha^- \cup V_\beta^+\}} \quad \text{for } \alpha > \beta$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}_4, \text{ and } K_C = \bigcup_{\substack{\alpha, \sigma \in K \\ p > \sigma}} W(\alpha, \sigma) \quad [5].$$

Then, the boundedness of K implies the boundedness of K_C and if x is space-like relative to K it is also space-like relative to K_C . Therefore we can take $K = K_C$ without altering the causality condition.

K being bounded, there always exists $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_4, \alpha > \beta$, such that K is contained in $W(\alpha, \beta)$ and consequently condition b) implies that the support of the Fourier transform is contained in $D(\alpha, \beta)$. However we will replace $D(\alpha, \beta)$ by $D(\alpha, -\alpha) = D(\alpha)$ with $\alpha = (\alpha, 0, 0, 0)$. Such a domain can be obtained by a suitable change³ of coordinates in x -space.

Secondly, because of technical reasons (Bros' theorem) we have to restrict condition a). The region $\mathcal{R}$ has to be symmetrical with respect to a hyperplane $p_0 = C^t$. Henceforth from a given $\mathcal{R}$ region we will build the largest $\mathcal{R}_S$ ($\mathcal{R}$ region symmetric with respect to $p_0 = C^t$) region contained in $\mathcal{R}$. Notice that we can always take $p_0 = 0$ by a suitable translation in p space which does not change the x -space support properties.

Under these assumptions, we shall prove the following:

Main Theorem. *Tempered distributions satisfying the conditions*

a') *the support is contained outside a region $\mathcal{R}_S$,*

b') *the support of the Fourier transform is contained in $D(\alpha)$ can be written:*

$$\tilde{f}(x) = \int_{C(\alpha)} \tilde{F}(x - t; t) d^3t \quad (1)$$

with

i) $C(\alpha) = \{t \in \mathbb{R}_3 | \|t\| = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2} \leq \alpha\}; t = (0, t).$

ii) $\tilde{F}(x; t)$ belongs to $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_4 \times \mathbb{R}_3)$.

iii) $\tilde{F}(x; t)$ is, for "fixed t ", a solution of the usual Dyson's problem

$$\tilde{F}(x, t) = \int \Delta(x; \sigma) \psi(x, \sigma; t) d\sigma, \quad \sigma \in \mathbb{R}^+$$

² $\alpha > \beta$ means $(\alpha - \beta)^2 > 0$ and $\alpha_0 > \beta_0$

$V_\alpha^- = \{x \in \mathbb{R}_4 | x < \alpha\} \quad V_\beta^+ = \{x \in \mathbb{R}_4 | x > \beta\}.$

³ This change does not affect the region $\mathcal{R}$ whose border is described in terms of invariants.

$\psi(x, \sigma; \mathbf{t})$ has compact support in $\mathbf{t}$ and is such that

$$\int e^{i(u, x)} \psi(x, \sigma; \mathbf{t}) d^4x = 0$$

if there exists $p \in \mathcal{R}_S$ such that $(p - u)^2 = \sigma$.

iv) $\text{supp}_t \tilde{F}(x; \mathbf{t}) \subset C(x)$.

Equality (1) has to be understood as follow:

Let $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_4)$ then [3]

$$\langle \varphi(x), \tilde{f}(x) \rangle = \langle \varphi(y + t), \tilde{F}(y; \mathbf{t}) \rangle. \quad (1')$$

Denote by ε the map $(x, \mathbf{t}) \rightarrow (x, t)$. Because of condition iv) we have a mapping

$$\varphi' = \varphi_0 \varepsilon: \mathbb{R}_4 \times \mathbb{R}_3 \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}_4).$$

Therefore there exists $\psi(y, \mathbf{t}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_4 \times \mathbb{R}_3)$ which coincides with $\varphi(y + t)$ on the support of $\tilde{F}$; this gives a meaning to formula (1').

Notice that iii) means the "support in x " of $\tilde{F}(x; \mathbf{t})$ is contained in $D(0)$.

In order to prove the usual representation, we can use two kinds of approaches. One method consists in using a differential equation [0, 1, 5], an other one is related to the construction of an envelope of holomorphy [2].

It seems very difficult to use again the differential equations for more general support conditions in x -space. On the other hand, we will show that the validity of the integral representation (1) is still connected with the resolution of a problem of functions of several complex variables. More precisely, given an analytic function f on a linear section of a holomorphy domain we will have to find an extension of this function to the whole space. This extension has, according to the support conditions and the temperedness, to satisfy some bounds.

In order to solve this problem we will use the L^2 space methods developed by L. HÖRMANDER [8], which will permit us to obtain existence theorem for analytic functions, with growth conditions at the boundary, in pseudoconvex domain.

Therefore we will first show that the support properties for f are equivalent to the existence of an analytic function in the envelope of holomorphy Ω of a certain domain ω .

From the general requirements of field theory, this analytic function must possess in ω some growth properties that we will extend in the second part to Ω . At this stage, however, we will be confronted with the difficult question of how growth conditions at the boundary change for an analytic function when we continue it to the envelope of holomorphy.

In the third part, the validity of formula (1) is then shown to be equivalent to

1. the existence of a function F analytic in a domain which contains Ω as a linear section and which restricts to f on Ω ;

2. the fulfillment by F of some growth conditions.

In the last part, we will apply HÖRMANDER's technique to solve the problem defined by 1. and 2.

I. The Domains ω and Ω Associated with f and Growth Properties in ω

The support of f is contained in a domain $D(\alpha)$ which is regular [3]. We can therefore decompose $\tilde{f}$ in two tempered distributions $\tilde{f}^+$ and $\tilde{f}^-$ such that

1. $\tilde{f} = \tilde{f}^+ - \tilde{f}^-$.
2. $\text{supp } \tilde{f}^+ \subset \overline{\{x \in \mathbb{R}_4 \mid x \in V_{-\alpha}^+ \quad x_0 > 0\}}$,
 $\text{supp } \tilde{f}^- \subset \overline{\{x \in \mathbb{R}_4 \mid x \in V_{-\alpha}^- \quad x_0 < 0\}}$.

Consider now $e^{i(p, x)}$. If $\text{Im } p \in V^+$, that is to say if $p \in T^+$, the restriction of $e^{i(p, x)}$ on $\bar{V}^+$ (in x) coincides with an element of $\mathcal{S}(\mathbb{R}_4)$. The action of $\tilde{f}^+$ on $e^{i(p, x)}$ is well defined and the result depends analytically on p .

Therefore the Fourier-Laplace transforms $f^\pm(p) = \langle \tilde{f}^\pm(x), e^{i(p, x)} \rangle$ are analytic functions respectively in T^+ and T^- . Note by b.v. f^+ (b.v. f^-) the tempered distribution boundary value of $f^+(p)$ ($f^-(p)$) when $\text{Im } p$ goes to zero from inside V^+ (V^-). As a classical result in distribution theory we have

$$\text{b.v. } f^+ - \text{b.v. } f^- = \mathcal{F} \tilde{f}$$

where by $\mathcal{F} \tilde{f}$ we means the Fourier transform of the tempered distribution $\tilde{f}$.

From the support condition for the Fourier transform one gets that for any $\varphi(p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_4)$, with $\text{supp } \varphi(p) \subset \mathcal{R}$

$$\langle \mathcal{F} \tilde{f}, \varphi \rangle = 0.$$

This result implies that for any such φ

$$\langle \text{b.v. } f^+, \varphi \rangle = \langle \text{b.v. } f^-, \varphi \rangle.$$

We are in position to apply the "Edge of the Wedge" theorem [5, 7], which states that there exists a function $f(p)$, analytic in the envelope of holomorphy $H(\tilde{\mathcal{R}}; T^+, T^-) = \Omega$ of $\omega = \tilde{\mathcal{R}} \cup T^+ \cup T^-$ with $\tilde{\mathcal{R}}$ an arbitrary small neighborhood of $\mathcal{R}$ in $\mathbb{C}_4$, such that

$$f(p) = f^+(p), \quad p \in T^+$$

$$f(p) = f^-(p), \quad p \in T^-$$

and the boundary values of $f(p)$ on the reals from the tubes T^+ and T^- are respectively b.v. f^+ and b.v. f^- .

We now propose to give the growth properties of $f(p)$ in ω . Since $\tilde{f} = \tilde{f}^+ - \tilde{f}^-$ we only need to know the properties of the Laplace transform of a tempered distribution which support is contained in the light cone.

We present here a result which is due to GLASER [7].

Lemma. *Let $\tilde{f}^+$ be a tempered distribution with support in $\bar{V}^+$; then there exists an integer $N \geq 0$ and a continuous function G with support in $\bar{V}^+$ and of polynomial growth such that $\tilde{f} = \square^N G$.*

Proof. Define

$$\tilde{F}_0(x) = \frac{1}{8\pi} \theta(x^2) \theta(x_0)$$

$$\tilde{F}_k(x) = \frac{1}{4^k k! (k+1)!} (x^2)^k \tilde{F}_0(x), \quad (k \geq 1, \text{ integer})$$

then for $k \geq 1$, in the sense of distributions,

$$\square \tilde{F}_k(x) = \tilde{F}_{k-1}(x)$$

and

$$\square \tilde{F}_0(x) = \Delta_R(x; 0), \quad \square \Delta_R(x; 0) = \delta(x).$$

Since $\tilde{f}^+$ is a tempered distribution over $\mathbb{R}_4$ with support in $\bar{V}^+$, there exists an integer N' and a constant $C > 0$, such that for any $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_4)$

$$|\langle \tilde{f}^+, \varphi \rangle| < C \|\varphi\|_{N'}.$$

Therefore $\tilde{f}^+$ can be extended into a continuous linear functional on the Banach space obtained by completion of $\mathcal{S}(\mathbb{R}_4)$ according to the norm $\|\cdot\|_{N'}$. But $\tilde{F}_{N'+1}$ is a function which has continuous derivatives of the N' first orders and $\square^{N'+2} \tilde{F}_{N'+1} = \delta(x)$.

Define

$$G(x) = \tilde{f}^+ * \tilde{F}_{N'+1}(x).$$

G is a continuous function of x and there exists a constant $K_{N'}$ depending only of N' and such that

$$|G(x)| = |\tilde{f}^+ * \tilde{F}_{N'+1}(x)| < C K_{N'} (1 + \|x\|)^{9N'+8}$$

and $\tilde{f}^+ = \square^{N'+2} G$, q.e.d.

The former demonstration was founded upon the fact that elements of $\mathcal{S}'(\mathbb{R}_4)$ with supports in $\bar{V}^+$ form an algebra for the convolution product. Distributions which have support contained in a set A ($A \subset \bar{V}^+$), A being such that $A + \bar{V}^+ \subset A$, form an ideal of this algebra, therefore $\text{supp } G \subset A$.

We now apply this result to $f^+(p)$.

$$\begin{aligned} f^+(p) &= \langle \tilde{f}^+, e^{i(p, x)} \rangle = \langle \tau_\alpha \tilde{f}^+, e^{i(p, x-\alpha)} \rangle \\ &= \langle \tau_\alpha \tilde{f}^+, e^{i(p, x)} \rangle e^{-ip_0 \alpha}, \quad p \in T^+. \end{aligned}$$

$\tau_\alpha f^+$ is defined by

$$\langle \tau_\alpha f^+, \varphi \rangle = \langle f^+, \tau_{-\alpha} \varphi \rangle \quad \text{for any } \varphi \in \mathcal{S}$$

$$(\tau_{-\alpha} \varphi)(x) = \varphi(x - \alpha).$$

Thus

$$\text{supp } \tau_\alpha f^+ \subset A = \overline{\{x \in \mathbb{R}_4 \mid x \in \bar{V}^+, x_0 > \alpha\}} \subset \bar{V}^+.$$

Obviously $A + \bar{V}^+ \subset A$ and therefore

$$f^+(p) = (p^2)^{N'+2} \int e^{i(p, x)} G(x) d^4 x e^{-i p_0 \alpha}$$

with $\text{supp } G \subset A$.

From $|G(x)| < C'(1 + \|x\|)^M$ follows

$$\begin{aligned} |f^+(p)| &\leq C' |(p^2)^{N'+2}| \int_A (1 + \|x\|)^M e^{-(\text{Im } p, x)} d^4 x e^{\text{Im } p_0 \alpha} \\ &\leq 2\pi C' |(p^2)^{N'+2}| \int_\alpha^\infty dx_0 \int_0^{x_0} (1 + \|x\|)^M e^{-\text{Im } p_0 x_0} e^{|\text{Im } \mathbf{p}| x} x^2 dx e^{\text{Im } p_0 \alpha} \end{aligned}$$

and if we call $d(p, T^+)$ or $\bar{d}$ the distance of $p \in T^+$ to the boundary of T^+ then

$$|f^+(p)| < C^+ |(p^2)^{N_+}| \left(1 + \frac{1}{\bar{d}}\right)^{M_+} e^{|\text{Im } \mathbf{p}| \alpha}, \quad p \in T^+.$$

In the same way we can prove that

$$|f^-(p)| < C^- |(p^2)^{N_-}| \left(1 + \frac{1}{\bar{d}}\right)^{M_-} e^{|\text{Im } \mathbf{p}| \alpha}, \quad p \in T^-$$

and, from the theorem of the Edge of the Wedge, we get:

$$|f(p)| < C |(p^2)^N| \left(1 + \frac{1}{\bar{d}}\right)^M e^{\alpha |\text{Im } \mathbf{p}|}, \quad p \in \omega \quad (2)$$

where the constants C , N and M are the suprema of those which appear in the corresponding inequality f^+ and f^- .

We now want to extend this majorization to the envelope of holomorphy $\Omega = H(\omega)$.

II. Growth Properties of f in Ω

We proceed in three stages. First we show that a function analytic in ω , bounded there by $e^{\alpha |\text{Im } \mathbf{p}|}$ keeps the same bound in $H(\omega)$. Then, by a suitable procedure of regularization, we suppress the polynomial growth at infinity in order to apply the result on the exponential bound.

1. Functions Bounded Exponentially in a Domain of Jost-Lehman-Dyson

We just state the theorem, the demonstration of which is found in Appendix I.

Theorem I (BROS). *Let $f(p)$ be an analytic function in $H(\mathcal{R}; T^+, T^-)$ satisfying the inequality*

$$|f(p)| < C e^{\alpha |\operatorname{Im} p|}, \quad p \in \omega$$

then it satisfies in $H(\mathcal{R}; T^+, T^-)$

$$|f(p)| < C e^{\alpha |\operatorname{Im} p|}.$$

2. Elimination of the Polynomial Growth

In inequality (2), we can replace p^2 by $(p - p')^2 - m^2$, by changing the constant C if necessary. According to the conditions [5] imposed to the region $\mathcal{R}$, there always exists a pair (p', m) such that $[(p - p')^2 - m^2]^{-1}$ is an analytic function of p in $\mathcal{R} \cup T^+ \cup T^-$.

We then define

$$g(p) = f(p) [(p - p')^2 - m^2]^{-N}$$

$g(p)$ is analytic in $\mathcal{R} \cup T^+ \cup T^-$ and satisfies

$$|g(p)| < C e^{\alpha |\operatorname{Im} p|} \left(1 + \frac{1}{d}\right)^M.$$

We now want to get an estimate of the growth of $g(p)$ in $H(\mathcal{R}; T^+, T^-)$ after suppression of $(1 + 1/d)^M$.

3. Regularization and Deregularization Procedure

The term $1/d$ comes from the fact that $f(q)$ is not a C^∞ -function on the boundary of the domain of holomorphy. We can suppress this behaviour by smearing with test functions the boundary values of $f(p)$.

Let $\chi(r)$ belong to $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, with $\operatorname{supp} \chi \in [0, 1]$ and $\int_0^1 r \chi(r) dr = 1$.

Then $\chi_a(r) = \chi(r/a)$, $a > 0$ satisfies $\int r \chi_a(r) dr = a^2$.

For $q \in \mathbb{C}_4$, $\varrho \in \mathbb{R}$ denote by $D(q; \varrho)$ the polydisc $\{p \in \mathbb{C}_4 | \|p - q\| \leq \varrho\}$.

If $D(q, a) \subset \omega$, from the analyticity of $f(p)$ in ω we get for $r_i < a$, $i = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} f(p) &= (2\pi)^{-4} \int f(p_0 + r_0 e^{i\theta_0}, \dots, p_3 + r_3 e^{i\theta_3}) d\theta_0 \dots d\theta_3 \\ &= (a\sqrt{2\pi})^{-8} \int f(p_0 + r_0 e^{i\theta_0}, \dots, p_3 + r_3 e^{i\theta_3}) \chi_a(r_0) \dots \chi_a(r_3) \\ &\quad \cdot r_0 dr_0 d\theta_0 \dots r_3 dr_3 d\theta_3 \end{aligned}$$

if then we set

$$-r_j e^{i\theta_j} = \xi_j + i\eta_j \quad (j = 0, \dots, 3)$$

$$f(p) = (a\sqrt{2\pi})^{-8} \int f(p - \xi - i\eta) \prod_{j=0}^3 \chi_a(\sqrt{\eta_j^2 + \xi_j^2}) d\xi_j d\eta_j.$$

Let us define now $T_{\varphi_\eta^a}(p)$ by

$$T_{\varphi_\eta^a}(p) = \int \cdots \int_{\substack{+ \sqrt{a^2 - \eta_j^2} \\ - \sqrt{a^2 - \eta_j^2}}} f(p - \xi) \prod_{j=0}^3 \chi_a(\sqrt{\eta_j^2 + \xi_j^2}) d\xi_j. \quad (3)$$

For every $a > 0$, this formula defines $T_{\varphi_\eta^a}(p)$ as an analytic function of p in $\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-$, where

$$\mathcal{R}_a = \{q \in \mathcal{R} \mid C(q, a) \subset \mathcal{R}\}$$

with

$$C(q, a) = \{p \in \mathbb{R}_4 \mid \|p - q\| < a\}.$$

But $\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-$ is not a domain of holomorphy, therefore $T_{\varphi_\eta^a}(p)$ can be analytically continued in to the envelope of holomorphy $H(\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-)$ of $\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-$.

When $\text{Im } p$ goes to zero in the tubes T^+ and T^- , the convolution (3) defines $T_{\varphi_\eta^a}(p)$ as a C^∞ function. It is the regularization of the tempered distributions f^+ and f^- by the C^∞ function $\varphi_\eta^a = \prod_j \chi_a(\sqrt{\eta_j^2 + \xi_j^2}) \eta_j$ being fixed and $|\eta_j| \leq a$.

We now introduce $F_a(p)$

$$F_a(p) = a (\sqrt{2\pi})^{-8} \int \cdots \int_{-\alpha}^{+\alpha} T_{\varphi_\eta^a}(p - i\eta) d\eta_0, \dots, d\eta_3 \quad (4)$$

$F_a(p)$ is analytic in⁴ $[H(\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-)]_a$ and $f(p) = F_a(p)$ in $[H(\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-)]_a$.

We show in Appendix II that for domains of the Jost-Lehman-Dyson type, $\mathcal{R}$ being sufficiently "regular", there exists for a given $\varepsilon (\varepsilon > 0)$, small enough, an integer n independent of ε such that

$$[H(\tilde{\mathcal{R}} \cup T^+ \cup T^-)]_{a^{1/n}} \subset H(\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-) \subset \Omega, \quad a < \varepsilon. \quad (5)$$

In the following we will go to the limit $a = 0$ in the different majorizations we will obtain. Therefore it is necessary that $\lim_{a \rightarrow 0} H(\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-) = H(\tilde{\mathcal{R}} \cup T^+ \cup T^-)$. This equality means that "taking the envelope of holomorphy" commutes in this case with taking the inductive limit or $\varinjlim H(D_\nu) = H(\varinjlim D_\nu)$. This result is obtained with the help of relation (5). In fact we have $H_\nu \subset H_\nu(D) \subset H(D)$ and the domains H_ν (here $H_\nu = H_a = [H(\tilde{\mathcal{R}} \cup T^+ \cup T^-)]_{a^{1/n}}$) form an increasing sequence approximating $H(D)$ from the inside. Therefore according to a well-known result in (FUKS [9]), $\varinjlim H_\nu = H(D)$ and the result, we need, follows.

⁴ Let K be an open set in $\mathbb{C}_4$, $[K]_a$ means $[K]_a = \{q \in K \mid D(q, a) \subset K\}$. Obviously $[K]_a \subset K$.

In Appendix III we show that $T_{\varphi_\eta^a}(p)$ is bounded by $M e^{\alpha|\operatorname{Im} p|}/a^m$ in $\tilde{\mathcal{H}}_a \cup T^+ \cup T^-$, therefore, according to Theorem I, it has the same bound in $H(\tilde{\mathcal{H}}_a \cup T^+ \cup T^-)$, a being a fixed constant.

We extend this bound to $F_a(p)$, with the help of (4):

$$|F_a(p)| \leq M(\pi)^{-4} a^{-(m+4)} e^{\alpha|\operatorname{Im} p - \theta|} p \in [H(\tilde{\mathcal{H}}_a \cup T^+ \cup T^-)]_a \quad (6)$$

and $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ such that $|\theta_i| < a$.

We now remove the a -dependence. Choose ε small enough so that results of Appendix II can be applied. For any $p \in H(\tilde{\mathcal{H}} \cup T^+ \cup T^-)$ there are two possible cases.

a) $d > \eta + \eta^n$.

d is the distance $d(p, [H(\tilde{\mathcal{H}} \cup T^+ \cup T^-)]) = d(p, \partial H)$ and $\eta^n = \varepsilon$. Then according to the result of Appendix II we can find a number a , such that (Fig. 1).

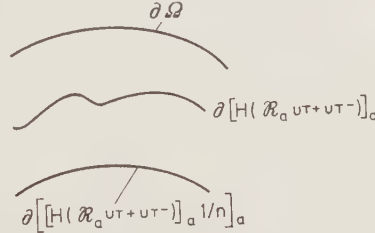


Fig. 1

$$\begin{cases} a < \varepsilon, \\ d < a + a^{1/n}, \\ p \in [H(\tilde{\mathcal{H}}_a \cup T^+ \cup T^-)]_a. \end{cases}$$

From $a^{1/n} < \eta$ we get

$$d(p, \partial H) < a^{1/n}(1 + a^{n-1/n}) < a^{1/n}(1 + \eta^{n-1}) = C_\eta^{1/n} a^{1/n}$$

and ε being small enough, $C_\eta < 2$ and $d^n < 2a$.

Therefore, from (6)

$$|F_a(p)| \leq M(\pi)^{-4} 2^{m+4} d^{-n(m+4)} e^{\alpha|\operatorname{Im} p - \theta|}$$

or since $a < \varepsilon$, there exists M' independent of a such that

$$|F_a(p)| \leq M' d^{-n(m+4)} e^{\alpha|\operatorname{Im} p|}. \quad (7)$$

b) $d > \eta + \eta^n$.

One can choose any $a < \eta^n = \varepsilon$ and according to (5),

$$D(p, \eta^n) \subset H(\tilde{\mathcal{H}}_a \cup T^+ \cup T^-),$$

therefore $p \in [H(\tilde{\mathcal{H}}_a \cup T^+ \cup T^-)]_a$ and the majorization (7) is valid with a constant M'' independent of p for $d(p, \partial H) > \eta + \eta^n$.

Finally for any p in $[H(\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-)]_a$ we have:

$$|F_a(p)| \leq M \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{n(m+4)} e^{\alpha |\operatorname{Im} p|}$$

with M independent of ε .

We deduce from this result that

$$|f(p)| \leq M \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{n(m+4)} e^{\alpha |\operatorname{Im} p|} \quad \text{for } p \in [H(\mathcal{R}_a \cup T^+ \cup T^-)]_a \quad (8)$$

since we have a bound which is independent of a , it is possible to pass to the limit and

$$|f(p)| \leq M \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{n(m+4)} e^{\alpha |\operatorname{Im} p|} \quad \text{for } p \in H(\tilde{\mathcal{R}} \cup T^+ \cup T^-). \quad (8')$$

In collecting the various results we get

Theorem II. *Let $f(p)$ be an analytic function of p in $\tilde{\mathcal{R}} \cup T^+ \cup T^-$ fulfilling the inequality*

$$|f(p)| < C e^{\alpha |\operatorname{Im} p|} |(p^2)|^N \left(1 + \frac{1}{d}\right)^M$$

then, for $\mathcal{R}$ sufficiently regular, it fulfils in $H(\tilde{\mathcal{R}} \cup T^+ \cup T^-)$

$$|f(p)| < C' e^{\alpha |\operatorname{Im} p|} |(p^2)|^N \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{M'}. \quad (9)$$

M' being a constant which depends only of M and of the regularity of $\mathcal{R}$.

III. Conditions of Validity of Formula (1)

We now give a set of properties for the Fourier transform of $\tilde{F}$ equivalent to the validity of formula (1). Our main tool will be the Paley-Wiener-Schwartz-Hörmander [6] theorem which connects growth properties to support conditions.

Theorem. *Let K be a convex compact subset of $\mathbb{R}^n$. Let H be the supporting function of K . Let $\tilde{f}$ be a distribution with support in K . Then its Fourier Laplace transform obeys the following inequality:*

$$\alpha) \quad |f(p)| \leq C(1 + \|p\|)^N e^{H(\operatorname{Im} p)}, \quad p \in \mathbb{C}_n$$

where N is the order of $\tilde{f}$ and $H(p) = \sup_{x \in K} (p, x)$.

Conversely every entire function analytic in $\mathbb{C}^n$ satisfying (α) is the Fourier-Laplace transform of a distribution with support in K .

Suppose now the validity of formula (1), the support in " x " of $\tilde{F}(x, t)$ being contained in $D(0)$, we can decompose $\tilde{F}(x, t)$ in $\tilde{F}^\pm(x, t)$ [3,5] such that the support in " x " of $\tilde{F}^+(x, t)$ [resp. $\tilde{F}^-(x, t)$] is in V^+ (resp. V^-), the support in " t " remaining unchanged, and:

$$\tilde{F}(x; t) = \tilde{F}^+(x; t) - \tilde{F}^-(x; t).$$

For p belonging to T^+ (or T^-) the action of $e^{i(p, x)} e^{-i(s, t)}$ on $\tilde{F}^+(x, t)$ [or $\tilde{F}^-(x, t)$] is well defined and the result depends analytically on p and s .

Hence, we define the analytic (entire in s) functions

$$\begin{aligned} F^+(p, s) &= \langle \tilde{F}^+(x, t), e^{i(p, x)} e^{-i(s, t)} \rangle, & p \in T^+, \\ F^-(p, s) &= \langle \tilde{F}^-(x, t), e^{i(p, x)} e^{-i(s, t)} \rangle, & p \in T^-. \end{aligned}$$

According to condition iii) of the main theorem for any $\varphi(p) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_4)$ with $\text{supp } \varphi \subset \mathcal{R}$ and for any $s \in \mathbb{C}_3$, one has:

$$\langle \text{b.v. } F^+(p, s), \varphi(p) \rangle = \langle \text{b.v. } F^-(p, s), \varphi(p) \rangle$$

therefore we can apply the Edge of the Wedge theorem for functions depending analytically on s , and consequently there exists a function $F(p, s)$ analytic in $\Omega \times \mathbb{C}_3$ whose restrictions on T^+ and T^- are respectively $F^+(p, s)$ and $F^-(p, s)$.

Now, from formula (1) we get

$$F(p, s)|_{s=p} = f(p), \quad p \in \Omega. \quad (10)$$

According to the Paley-Wiener theorem conditions iv) implies:

$$|F(p, s)| < C(p) (1 + \|s\|)^L e^{\alpha |\text{Im } s|} \quad (11)$$

for $(p, s) \in \Omega \times \mathbb{C}_3$.

This inequality restricted to $s = p$ gives

$$|f(p)| < C(p) (1 + \|p\|)^L e^{\alpha |\text{Im } p|} \quad \text{for } p \in \Omega.$$

This result is consistent with the growth properties, we directly found for f (since $|p^2| \leq \|p\|^2$) if $C(p)$ is polynomial in p .

We have to remark that the conditions imposed on $\tilde{F}(x; t)$ in the main theorem do not in any case imply the unicity of the formula. In particular the orders (relative to x or t , or both) are not specified for the distribution $\tilde{F}$.

Different types of growth can be proposed, which are compatible with (9) and (11). For instance⁵

$$\begin{aligned} \alpha) \quad |F(p, s)| &< C \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{M'} (1 + \|p\|^2 + \|s\|^2)^A e^{\alpha |\text{Im } s|}, \\ \beta) \quad |F(p, s)| &< C \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{M'} (1 + \|p_0\|^2 + \|s\|^2)^A e^{\alpha |\text{Im } s|}, \\ \gamma) \quad |F(p, s)| &< C \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{M'} (1 + \|p\|^2 + \|p - s\|^2)^A e^{\alpha |\text{Im } s|}, \end{aligned}$$

the exponents A are chosen in such a way they are compatible with (9).

Therefore from formula (1) we get the existence of a function of p and s , $F(p, s)$, analytic in $\Omega \times \mathbb{C}_3$, whose restriction to $s = p$ is $f(p)$ and which satisfies α), β) or γ) with suitable exponents.

Conversely, if we know $F(p, s)$ satisfying the former properties, one can prove that there exists between $f(x)$ and $\tilde{F}(x, t)$ [reconstructed from

⁵ In these inequalities d means either the distance to $\mathbb{C} \Omega$ in $\mathbb{C}_4$ or the distance to $\mathbb{C} (\Omega \times \mathbb{C}_3)$ in $\mathbb{C}_7$, since they are equal.

$F(p, s)$] a relation of type (1). The important step, in this proof, is to recover the support in " $\mathcal{L}$ " by the help of the Paley-Wiener theorem.

This proves:

Theorem III. *A sufficient condition for the validity of the main theorem for an f as in Theorem II is the existence of a function $F(p, s)$ analytic in $\Omega \times \mathbb{C}_3$ and such that:*

- 1) $F(p, s)|_{s=p} = f(p)$,
- 2) $|F(p, s)| \leq C \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{M'} (1 + \|p\|^2 + \|s\|^2)^A e^{\alpha |\operatorname{Im} s|}$.

A being such that $A \geq N$.

We have stated this theorem with the choice of a α -type growth condition. We shall henceforth confine ourselves to this growth condition.

IV. Existence Theorem for $F(p, \vec{s})$

At this stage we will use the technique of L. HÖRMANDER following essentially the article: " L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator" [8].

First we need a function φ plurisubharmonic in Ω such that

$$\int |f(p)|^2 e^{-\varphi} dV_{\Omega} < +\infty$$

with dV_{Ω} the Lebesgue measure on Ω .

From the estimate (9)

$$\int |f(p)|^2 \frac{e^{-2\alpha |\operatorname{Im} p|}}{(1 + \|p\|^2)^{2(N+n)}} \left(\frac{d}{1+d}\right)^{2M'} dV_{\Omega}$$

is finite. We have added an extrapower n to $(1 + \|p\|^2)$ in order to insure the convergence at infinity (if $m = \dim_{\mathbb{C}} \Omega$, $4n \geq m + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$)).

This inequality implies that $f(p) \in L^2_{(0,0)}(\varphi, \Omega)^6$ with

$$\begin{aligned} \varphi(p) = 2\alpha |\operatorname{Im} p| + 2M' \sup \left(-\log d + \log(1 + \eta), \log \frac{1 + \eta}{\eta} \right) \\ + 2(N + n) \log(1 + \|p\|^2), \end{aligned} \quad (12)$$

η being an arbitrary strictly positive number.

We have replaced $-\log \frac{d}{1+d}$ by $\sup \left(-\log d + \log(1 + \eta), \log \frac{1 + \eta}{\eta} \right)$ in order that plurisubharmonic functions appear. We show in Appendix IV that $\varphi(p)$ is plurisubharmonic.

We will show that there exists $F(p, s)$ analytic in $\Omega \times \mathbb{C}_3$ and which belongs to $L^2(\bar{\varphi}(p, s), \Omega \times \mathbb{C}_3)$ with:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(p, s) = 2\alpha |\operatorname{Im} s| + 2M' \sup \left(-\log d + \log(1 + \eta), \log \frac{1 + \eta}{\eta} \right) \\ + A \log(1 + \|p\|^2 + \|s\|^2). \end{aligned} \quad (13)$$

⁶ $f \in L^2_{(p,q)}(\varphi, \Omega)$ means f is a differential form of type (p, q) and φ being a function locally bounded from above, measurable in Ω , $\int |f(p)|^2 e^{-\varphi} dV_{\Omega}$ exists.

The coefficient A will be specified later. We show in Appendix IV that $\bar{\varphi}$ is plurisubharmonic and that its lower bound of plurisubharmonicity is given by e^{χ} with:

$$\chi = C^t - 2 \log(1 + \|p\|^2 + \|s\|^2).$$

We can consequently apply Theorem 2.5.1 of Ref. [8] modified for our purpose.

Theorem IV. *Let $\bar{\varphi}$ be a plurisubharmonic function in $\Omega \times \mathbb{C}_3$ and φ be a plurisubharmonic function in Ω , Ω being a pseudoconvex open set in $\mathbb{C}_3$, such that*

$$|\bar{\varphi}(p, s) - \varphi(p)| \leq C \quad \text{for} \quad |p - s| \leq 1, \quad p \in \Omega, \quad s \in \mathbb{C}_3. \quad (14)$$

Then for any function u analytic in Ω such that

$$\int_{\Omega} |u|^2 e^{-\varphi} d\sigma < +\infty$$

$d\sigma$ where is the Lebesgue measure on Ω , there exists an analytic function U in $\Omega \times \mathbb{C}_3$ such that $U = u$ in Ω and

$$\int_{\Omega \times \mathbb{C}_3} |U|^2 e^{-\bar{\varphi}} (1 + \|p\|^2 + \|s\|^2)^{-3} dV \leq K \int_{\Omega} |u|^2 e^{-\varphi} d\sigma$$

K being independent of u .

The difference between this theorem and that stated by HÖRMANDER lies in the fact that relation (14) is different and Ω is not the whole space. We sketch here a demonstration of Theorem IV.

1° Extension of $f(p)$ to $F_1(p, s_1)$ analytic in $\Omega \times \mathbb{C}_1$.

Let

$$F_1(p, s_1) = f(p) \chi(p_1 - s_1) - (p_1 - s_1) \psi(p, s_1)$$

with

$$\chi(p_1 - s_1) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$$

such that

$$\chi(p_1 - s_1) = \chi(|p_1 - s_1|) = \begin{cases} 1 & |p_1 - s_1| < 1/2 \\ 0 & |p_1 - s_1| > 1. \end{cases}$$

To prove the existence of $F_1(p, s_1)$ we have to prove the existence of ψ . From the analyticity of F_1 it follows that

$$\bar{\partial} F_1 = \sum_k d\bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} F_1 = 0$$

where z is a point in $\Omega \times \mathbb{C}_1$, i.e.

$$\bar{\partial} F_1 = f(p) \bar{\partial} \chi - (p_1 - s_1) \bar{\partial} \psi = 0$$

which can be rewritten

$$\bar{\partial} \psi = f(p) \frac{\bar{\partial} \chi}{p_1 - s_1} = g.$$

There exists such a g since, when $|p_1 - s_1| < 1/2$, $\bar{\partial} \chi = 0$. Thus, g is a differential form of type $(0, 1)$ satisfying $\bar{\partial} g = 0$. We show now, that

there exists a form ψ of type $(0, 0)$ in $\Omega \times \mathbb{C}_1$ such that $\bar{\partial}\psi = g$. We need the following theorem (HÖRMANDER, Ref. [8], Theorem 2.2.1').

Theorem V. *Let Ω' be a pseudo-convex open set of $\mathbb{C}_n$, let φ be a plurisubharmonic function on Ω' and ex, $\chi \in C(\Omega')$, the lowest bound of plurisubharmonicity of φ . Then for any $g \in L^2_{(p,q)}(\Omega', \text{loc})$ ⁷ $q > 0$ and such that*

$$\bar{\partial}g = 0 \quad \int_{\Omega'} |g|^2 e^{-(\varphi+\chi)} dV_{\Omega'} < +\infty$$

one can find a form $\psi \in L^2_{p,q-1}(\Omega', \varphi)$ such that

$$\bar{\partial}\psi = g \quad q \int_{\Omega'} |\psi|^2 e^{-\varphi} dV \leq \int_{\Omega'} |g|^2 e^{-(\varphi+\chi)} dV.$$

In our case we choose φ and $\bar{\varphi}$ given by (12) and (13), with $A = 2(N+n)$, then they satisfy relation (14) (see Appendix IV).

Define

$$\varphi(p, s_1) = \bar{\varphi}(p, s) \Big|_{\substack{s_1 = p_1 \\ s_2 = p_2}}$$

Now let us estimate $\int_{\Omega \times \mathbb{C}_1} |g|^2 e^{-\varphi_1} dV_{\Omega \times \mathbb{C}_1}$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \mathbb{C}_1} |g|^2 e^{-\varphi_1} dV &= \int_{\Omega} \int_{\|p_1 - s_1\| < 1} |g|^2 e^{-\varphi_1} dV \\ &= \int_{\Omega} \int_{\|p_1 - s_1\| < 1} |g|^2 e^{-(\varphi_1 - \varphi)} e^{-\varphi} dV \\ &\leq \pi e^c (2c_1)^2 \int_{\Omega} |f|^2 e^{-\varphi} dV < +\infty \end{aligned}$$

with c_1 , the upper bound of $\left| \frac{\partial \chi}{\partial \bar{s}_1} \right|$ in the unit disc. This result shows that $g \in L^2_{(0,1)}(\Omega \times \mathbb{C}_1, \varphi_1)$ with φ_1 strictly plurisubharmonic.

By choosing

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 - \chi$$

with

$$\chi = c_1 - 2 \log(1 + \|p\|^2 + \|s_1\|^2)$$

we can apply Theorem V and, from it, we get the existence of $\psi(p, s_1) \in L^2_{(0,0)}(\Omega \times \mathbb{C}_1, \tilde{\varphi}_1)$ such that $\bar{\partial}\psi = g$.

There exists consequently, an analytic function $F_1(p, s_1)$ in $\Omega \times \mathbb{C}_1$, which restricts to $f(p)$ on the hyperplane $s_1 = p_1$ and satisfies

$$\int_{\Omega \times \mathbb{C}_1} |F_1(p, s_1)|^2 e^{-\varphi_1} (1 + \|p\|^2 + \|s_1\|^2)^{-3} dV < +\infty.$$

2°) We can make again the same construction with, now, $F_1(p, s_1)$ as initial function. Step by step we arrive to $F(p, s)$. Therefore we can state the

⁷ $L^2(\Omega, \text{loc})$ is the space of functions square integrable on any compact subset of Ω .

Theorem. Let $f(p)$ be an analytic function in Ω , domain of holomorphy in $\mathbb{C}_4$, satisfying

$$|f(p)| \leq C e^{\alpha |\operatorname{Im} p|} (1 + \|p\|^2)^N \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{M'}, \quad p \in \Omega$$

then there exists a function $F(p, s)$ analytic in $\Omega \times \mathbb{C}_3$ such that

$$1) |F(p, s)|_{s=p} = f(p),$$

$$2) \int |F(p, s)|^2 e^{-\bar{\varphi}(p, s)} (1 + \|p\|^2 + \|s\|^2)^{-9} dV < +\infty$$

with $\bar{\varphi}(p, s) = 2\alpha |\operatorname{Im} s| + 2M' \sup \left(-\log d + \log(1 + \eta), \log \frac{1 + \eta}{\eta} \right) + 2(N + n) \log(1 + \|p\|^2 + \|s\|^2)$.

From inequality 2) we can deduce a majorization for F in $\Omega \times \mathbb{C}_3$. From the positivity of the integrand it follows that

$$\int_{\mathbb{C}_3} |F(p, s)|^2 e^{-\bar{\varphi}(p, s)} (1 + \|p\|^2 + \|s\|^2)^{-9} dV < +\infty$$

almost everywhere in p .

By CAUCHY's integral formula this implies that

$$|F(p, s)| e^{-\frac{1}{2} \bar{\varphi}(p, s)} (1 + \|p\|^2 + \|s\|^2)^{-9/2}$$

is bounded for almost every P . But the continuity of F and the semi-continuity of $\bar{\varphi}$ implies this for every p . Therefore we have

Theorem V'. Let $f(p)$ be an analytic function in Ω domain of holomorphy in $\mathbb{C}_4$ and satisfying

$$|f(p)| \leq C e^{\alpha |\operatorname{Im} p|} (1 + \|p\|^2)^N \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{M'}, \quad p \in \Omega$$

then there exists a function $F(p, s)$ analytic in $\Omega \times \mathbb{C}_3$ such that

$$1) F(p, s)|_{s=p} = f(p),$$

$$2) |F(p, s)| < C' e^{\alpha |\operatorname{Im} s|} \left(1 + \frac{1}{d}\right)^{M'} (1 + \|p\|^2 + \|s\|^2)^{N + \frac{11}{2} + \varepsilon}.$$

ε being any positive number.

Acknowledgements. It is a pleasure to thank Pr. H. J. BORCHERS who introduced us to this problem and provided fruitful advice and Dr. J. LASCoux whose tenacity has compelled us to solve it.

We are particularly grateful to V. GLASER and J. BROS for valuable advice during the progress of our work.

Finally we also acknowledge useful discussions with R. STORA and J. BESSIS.

Appendix I

In a preliminary version of this work, we needed a theorem of BROS concerning functions bounded by $e^{\alpha |\operatorname{Im} p|}$ in a domain of JOST-LEHMAN-DYSON. We give here a proof for functions bounded by $e^{\alpha |\operatorname{Im} p|}$ which is very close to the BROS' one.

Theorem (BROS). *Let $f(k)$ be a function analytic in $\Omega = H(\mathcal{R}; T^+, T^-)$ ⁸ which satisfies*

$$|f(k)| < C e^{\alpha|q|} \quad k = p + iq \quad k \in \mathcal{R} \cup T^+ \cup T^-. \quad (1)$$

Then it satisfies in Ω

$$|f(k)| \leq C e^{\alpha|q|}. \quad (2)$$

Define $F(w, k) = [C e^{-iw} - f(k)]^{-1}$ with $w = u + iv$, C being the positive constant of inequality (1). $F(k, w)$ is analytic at any point (w, k) such that $f(k)$ is analytic and $C e^{-iw} - f(k)$ different from zero. From the hypothesis, this last condition is fulfilled if

$$k \in \mathcal{R} \cup T^+ \cup T^-,$$

$$|e^{-iw}| \geq e^{\alpha|q|} \quad \text{or} \quad v \geq \alpha|q|.$$

Thus $F(w, k)$ is analytic, in particular, in a neighborhood of the union of the following three regions:

$$\text{the tube } T^+ = \{(w, k) | v > \alpha|q|, \quad q \in V^+\}$$

$$\text{the tube } T^- = \{(w, k) | v > \alpha|q|, \quad q \in V^-\}$$

$$\text{the real region } \mathcal{R}_1 = \{(w, k) | v = 0, \quad q = 0, \quad k = p \in \mathcal{R}\}.$$

Consequently $F(w, k)$ is analytic in the envelope of holomorphy of $\tilde{\mathcal{R}}_1 \cup T^+ \cup T^-$, where $\tilde{\mathcal{R}}_1$ is the intersection of a complex neighborhood of $\mathcal{R}_1$ (in $\mathbb{C}_5$) with the convex envelope T of $T^+ \cup T^-$. We are going to show that the envelope of holomorphy of $\tilde{\mathcal{R}}_1 \cup T^+ \cup T^-$ is:

$$T \cap \{(w, k) | k \in \Omega\}.$$

First, we restrict ourselves to the case where the k -space is 2-dimensional, and prove the following lemma.

Lemma. *We consider in the space $\mathbb{C}_3$ of variables $w = u + iv$, $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$, $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ the tubes*

$$T'^+ = \{(w, \zeta_1, \zeta_2) | v > \alpha|\eta_1 - \eta_2|, \quad \eta_1 > 0, \quad \eta_2 > 0\},$$

$$T'^- = \{(w, \zeta_1, \zeta_2) | v > \alpha|\eta_1 - \eta_2|, \quad \eta_1 < 0, \quad \eta_2 < 0\}$$

and the region

$$\mathcal{R}' = \{(w, \zeta_1, \zeta_2) | v = \eta_1 = \eta_2 = 0 \quad (\xi_1, \xi_2) \in \mathcal{R}\}$$

where $\mathcal{R}$ is bounded with space-like curves and h -convex in the space (ξ_1, ξ_2) .

Let T' be the convex envelope of $T'^+ \cup T'^-$ and Ω' the domain of DYSON associated to $\mathcal{R}'$ and to the tubes

$$\{(\zeta_1, \zeta_2) | \eta_1 > 0, \eta_2 > 0\} \quad \text{and} \quad \{(\zeta_1, \zeta_2) | \eta_1 < 0, \eta_2 < 0\}.$$

Then, the envelope of holomorphy of $T'^+ \cup T'^- \cup \mathcal{R}'$ is the intersection of T' with $\{(w, \zeta_1, \zeta_2) | (\zeta_1, \zeta_2) \in \Omega'\}$.

⁸ We remember that $\mathcal{R}$ is h -convex, which means that every branch of admissible hyperboloid (in DYSON's meaning) cuts $\mathcal{R}$ along a connected arc. Under these conditions $\mathcal{R}$ coincides with the set of all the real points of Ω .

Proof. T' is the union of T'^+ , T'^- and the tubes

$$T_1 = \{(w, \zeta_1, \zeta_2) | v > \alpha |\eta_1 - \eta_2|, \eta_1 > 0, \eta_2 < 0\},$$

$$T_2 = \{(w, \zeta_1, \zeta_2) | v > \alpha |\eta_1 - \eta_2|, \eta_1 < 0, \eta_2 > 0\}.$$

T_1 can be looked at as the convex envelope of the union of the edge

$$A = (\eta_2 = 0, \eta_1 > 0, v = \alpha |\eta_1 - \eta_2|) \quad \text{of} \quad T'^+,$$

and the face

$$\Phi = (\eta_2 \leq 0, \eta_1 > 0, v \geq \alpha |\eta_1 - \eta_2|) \quad \text{of} \quad T'^-.$$

Consider, then, A as belonging to the boundary of the tube

$$\Theta = \{(w, \zeta_1, \zeta_2) | \eta_2 > 0, \eta_1 > 0, v' = v - \alpha(\eta_1 - \eta_2) < 0\}$$

and Φ as belonging to the boundary of the opposite tube. We are lead to calculate the envelope of holomorphy of $\Theta \cup -\Theta \cup \tilde{\mathcal{R}}'$ and to restrict it to the tube T_1 (cf. Lemma 4, Ref. [10]).

This envelope of holomorphy is easily obtained by looking at $\mathcal{R}'$ as a union of cubes

$$\{a_1 < \xi_1 < b_1, a_2 < \xi_2 < b_2, -c < u' = u - \alpha(\xi_1 - \xi_2) < 0\}.$$

Since C can be taken arbitrarily large, independently of a_1, a_2, b_1, b_2 , each of those contributions lead to a domain of holomorphy which is the product of the complex plane of the variable $w' = u' + iv'$ by the domain of DYSON of the space (ζ_1, ζ_2) relative to the region $\{a_1 < \xi_1 < b_1, a_2 < \xi_2 < b_2\}$ we consider. By taking the union over all the squares of this type contained in $\mathcal{R}'$, we get, as it is well known, the domain of Dyson Ω' . Thus, the envelope of holomorphy of $\Theta \cup -\Theta \cup \tilde{\mathcal{R}}'$ is $\{(w, \zeta_1, \zeta_2) | (\zeta_1, \zeta_2) \in \Omega'\}$ and its restriction to T_1 belongs to the envelope of holomorphy of $T'^+ \cup T'^- \cup \tilde{\mathcal{R}}'$.

The above results together with similar ones for T_2 complete the proof of the lemma.

Now, let us return to the four dimensional case.

Let (w, k) belong to $T \cap \{(w, k) | k \in \Omega\}$. We want to show that this point belongs to the envelope of holomorphy of $T^+ \cup T^- \cup \tilde{\mathcal{R}}_1$.

Since $k \in \Omega$, there exists a doubly inadmissible hyperbola which contains k ; more, since the region $\mathcal{R}$ is assumed to be symmetrical with respect to the plane $k_0 = 0$, this hyperbola h can always be chosen in such a way that its plane is parallel to the k_0 axis (the reader is referred to the geometrical description of the domains of Dyson [1, 2]). Let us cut, then, the figure by the three dimensional complex plane generated by the plane of this hyperbola and the k_0 -axis. In this section of the five dimensional space, one can consider the section T'^+ , T'^- , $\mathcal{R}'$ of, respectively, the regions T^+ , T^- , $\mathcal{R}_1$; by applying the lemma, one finds that the envelope of holomorphy of $T'^+ \cup T'^- \cup \tilde{\mathcal{R}}'$ is $T' \cap \{(w, k) | k \in \Omega'\}$. The point

(w, k) , we considered up to now, is by construction in Ω' , it remains for us to show that it is in T' . If so, the point (w, k) belongs to the envelope of holomorphy of $T'^+ \cup T'^- \cup \tilde{\mathcal{H}}$ and therefore "a fortiori" to the $T^+ \cup T^- \cup \tilde{\mathcal{H}}_1$ ones.

Knowing that by hypothesis $(w, k) \in T$, one draws from (v, q) the line parallel to the q_0 axis; one shows easily (Fig. 2) that it meets T^+ and T^- at two points (v, q^+) and (v, q^-) such that q is on the segment $[q^+, q^-]$. Now, it is clear that the points $(w, p + iq^+)$ and $(w, p + iq^-)$ belong respectively to the tubes T'^+ and T'^- (since by construction, these tubes are in a plane parallel to the k_0 axis).

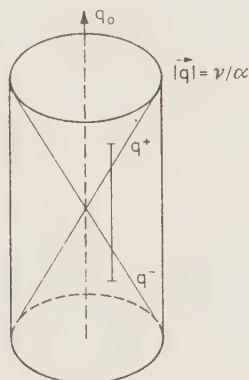


Fig. 2

Therefore we have proved that the function

$$F(w, k) = [C e^{-i w} - f(k)]^{-1}$$

is analytic for $k \in \Omega$ and $(w, k) \in T$.

This last condition can be written

$$v > \alpha |q|. \quad (3)$$

Thus for $k \in \Omega$, condition (3) implies:

$$|C e^{-i w}| - |f(k)| = C e^v - |f(k)| \neq 0$$

or

$$|f(k)| \leq C e^{\alpha |q|} \quad \forall k \in \Omega.$$

Remark. From the demonstration of the auxilliary lemma, it was obvious that the inequality is true in a 2-dimensional space, without any restriction to symmetrical region. This restriction appears, however, unavoidable in the four dimensional case.

Appendix II

$H(\mathcal{R}; T^+, T^-) = \Omega$ and its "Translated" Parts

1. Two Dimensional Case

Distance of the points (real or complex) on one hyperbola from a point on another one.

We assume that the centers of the hyperbolae are on the line $x_0 = 0$ and that the asymptotic directions make an angle of 45° with the x axis (Fig. 3).

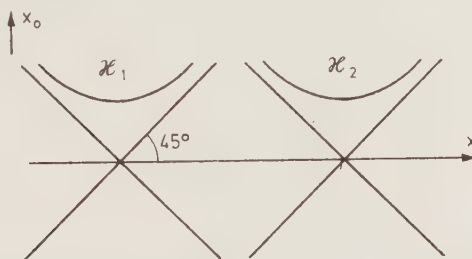


Fig. 3

Define

$$\mathcal{H}_1 \equiv x_0^2 - x^2 - m^2, \quad \mathcal{H}_2 \equiv x_0^2 - (x - u)^2 - n^2.$$

Let us take a point $P = P(x_0, x)$ on $\mathcal{H}_1$ and try to have an estimate of the distance $d(P, P')$ between P and $P' \in \mathcal{H}_2$. More precisely, we want the best possible majorization of $\inf_{P' \in \mathcal{H}_2} d(P, P')$.

Let (a, b) be the coordinates of P . Since one tries to majorize $\inf_{P' \in \mathcal{H}_2} d(P, P')$ one can take for $P' = P'(\sqrt{b^2 + u^2}, b + u)$.

Thus

$$d^2(P, P') = u^2 + (a - \sqrt{b^2 + u^2})^2 \quad \text{with} \quad a = \sqrt{b^2 + m^2}.$$

Finally

$$(\sqrt{b^2 + m^2} - \sqrt{b^2 + n^2})^2 \leq (m - n)^2$$

consequently

$$d^2(P, P') \leq u^2 + (m - n)^2,$$

hence

$$\inf d^2(P, \mathcal{H}_2) \leq u^2 + (m - n)^2.$$

For complex points, we have

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - y_0^2 - x^2 + y^2 = m^2 \\ x_0 y_0 = x y \end{cases} \\ \mathcal{H}_2 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - y_0^2 - (x - u)^2 + y^2 = n^2 \\ x_0 y_0 = y(x - u) \end{cases} \end{aligned}$$

(The y 's are used for the imaginary parts.)

Let P be the point $(x_0 = a, x = b, y_0 = c, y = d)$. The a, b, c, d obey $a^2 - c^2 - b^2 + d^2 = m^2$ and $ac = bd$.

A parametrization of points of $\mathcal{H}_2$ is given by:

$$\begin{aligned} x_0 &= n \operatorname{ch} \varphi \cos \theta & y_0 &= \varepsilon n \operatorname{sh} \varphi \sin \theta \\ x - u &= \varepsilon n \operatorname{sh} \varphi \cos \theta & y &= n \operatorname{ch} \varphi \sin \theta \end{aligned} \quad \varepsilon^2 = 1.$$

Therefore one can set:

$$y_0 = c, \quad x - u = b$$

thus

$$x_0^2 + y^2 = n^2 + c^2 + b^2 = a^2 + d^2 + u^2 - m^2 = A'^2$$

and

$$a^2 + d^2 = m^2 + c^2 + b^2 = A^2.$$

Define

$$a = A \cos \sigma, \quad x_0 = A' \cos \psi,$$

$$d = A \sin \sigma, \quad y = A' \sin \psi,$$

but

$$x_0 c = y b$$

therefore

$$c/b = y/x_0 = d/a = \operatorname{tg} \sigma = \operatorname{tg} \psi \quad \text{or} \quad \sigma = \psi$$

and

$$\begin{aligned} d^2(P, P') &= (a - x_0)^2 + (b - x)^2 + (c - y_0)^2 + (d - y)^2 \\ &= \cos^2 \sigma (A - A')^2 + u^2 + \sin^2 \sigma (A - A')^2 \\ &= u^2 + (A - A')^2 \end{aligned}$$

but

$$(A - A')^2 = (\sqrt{n^2 + c^2 + b^2} - \sqrt{m^2 + c^2 + b^2})^2 \leq (m - n)^2.$$

Thus

$$\inf d^2(P, \mathcal{H}_2) \leq u^2 + (m - n)^2$$

which shows that this formula is valid for real or complex points.

2. Four Dimensional Case

The boundary of Ω is given by the set of all the real or complex points obtained by cutting the hyperboloids bi-tangent to $\mathcal{R}$ (in our case $\mathcal{R}$, being symmetrical, the vertical of points of contact is parallel to the x_0 -axis) with planes going through the points of contact. The boundary is therefore the union of all the hyperbolas cut on the hyperboloids by planes revolving around the vertical of points of contact [11].

We know that if $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ then $\Omega' \subset \Omega$. We have assumed that the boundary of $\mathcal{R}$ is made with space like surfaces, such that $\mathcal{R}$ is h -convex. $\mathcal{R}$ being symmetrical, it follows that the only cusp-like points (of order q)⁹ of $\partial \mathcal{R}$ are in the plane $x_0 = 0$.

⁹ We say that a point of a manifold is of order q if every section, going through this point, by a 2-plane parallel to the x_0 axis is a curve which has a contact of order at least q with its tangents at this point.

We are going to show that each point of the boundary of $H(\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-)$ is within a distance, from the complementary of Ω , less than " a " raised to a specific power, and conversely.

First, let us go back for a moment to the two dimensional case. Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}'$ be two curves which are mutually tangential at a point of order q . We suppose that in a neighborhood of this point they are smooth curves. We call $\mathcal{R}$ the region inside of the "angle" of contact (Fig. 4). Let $\mathcal{R}_a$ be the retracted region obtained with balls of radius a (a is less than some ε connected to the size of the neighborhood).

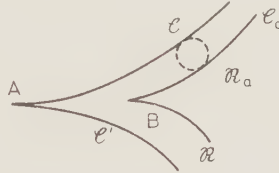


Fig. 4

Locally $\mathcal{R}$ is given by $|y| < x^q$ and $\mathcal{C} = y - x^q, y \geq 0$. Then

$$\mathcal{C}_a = \left\{ x, y \mid y \geq 0 \quad X = x + q \frac{2ax^q}{\sqrt{1+q^2x^{2q}}} \quad Y = y - \frac{2a}{\sqrt{1+q^2x^{2q}}} \right\}.$$

The point of retrogression of the "translated" curves is given by $Y = 0$
 $X \cong (2a)^{1/q}$.

Thus we have

$$d(A, \mathcal{R}_a) \cong a^{1/q}.$$

Let us now return to the four dimensional case. Let p be a singular point on the boundary of $\mathcal{R}$. We assume that there exists an ε such that at least one of the sections of $\mathcal{R}$, by 2-planes passing through p , is regular everywhere else in a circle of radius 2ε , centered at p . That condition insures us that there is no nearby singularities in any directions. This is obviously the case when $\mathcal{R}$ is symmetrical, since singularities are only in the $x_0 = 0$ plane.

Consider then a section of $\partial\mathcal{R}$ (the boundary of $\mathcal{R}$) by a 2-plane π parallel to the x_0 -axis and look at the neighborhood of a regular point A . The hyperbola $\mathcal{H}_A$ is a boundary hyperbola tangent in A to $\partial\mathcal{R}$. Its center is on the line $x_0 = 0$. We call x the other axis in the 2-plane π . It is easy to see that if $\mathcal{H}_A = x_0^2 - (x - u) - m^2$ (Fig. 5), then there exists in the same plane a hyperbola tangent to the section of $\partial\mathcal{R}_a$ and of equation $x_0^2 - (x - u')^2 - m'^2$ with $u - u' \in \mathcal{O}(a)$ and $m - m' \in \mathcal{O}(a)$.

The distance is therefore majorized by a^2 . We can convince ourselves of the uniformity of this majorization, that is to say, for any regular point of $\partial\mathcal{R}$, there exists a constant $C_{\mathcal{R}}$ such that $d^2(A, \partial\mathcal{R}_a) \leq C_{\mathcal{R}}a^2$.

Consider now in the plane $x_0 = 0$ the case of a singular point of order n . In one of the 2-planes, the extreme hyperbolae degenerate into cones



Fig. 5

of vertices A and B . We thus get,

$$d^2(A, \partial \mathcal{R}_a) \leq C_{\mathcal{R}} a^{2/n}, \quad d^2(B, \partial \mathcal{R}) \leq C'_{\mathcal{R}} a^2$$

therefore

$$H(\mathcal{R}_a; T^+, T^-) \supset [H(\mathcal{R}; T^+, T^-)]_{a^{1/n}}$$

since any point of the boundary of $H(\mathcal{R}; T^+, T^-)$ is at most at a distance of order $a^{1/n}$ from the boundary of $H(\mathcal{R}_a; T^+, T^-)$.

Appendix III

Majorization of $T_{\varphi_\eta^a}(p)$ in $\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-$

$$T_{\varphi_\eta^a}(p) = \int \cdots \int_{-\sqrt{a^2 - \eta_j^2}}^{+\sqrt{a^2 - \eta_j^2}} f(p - \xi) \prod_{j=0}^3 \chi_a(\sqrt{\eta_j^2 + \xi_j^2}) d\xi_j$$

and

$$\int_0^1 r \chi_a(r) dr = a^2.$$

From the results we have obtained for $f(p)$ in the tubes

$$|T_{\varphi_\eta^a}(p)| < M e^{\alpha |\operatorname{Im} p|} \|\varphi_\eta^a\|_m$$

with m depending of N (see formula 2) and $\tilde{\mathcal{R}}_a \cup T^+ \cup T^-$

$$\|\varphi_\eta^a\|_m = \sup_{\xi - \operatorname{Re} q_i \in [-\sqrt{a^2 - \eta^2}, \sqrt{a^2 - \eta^2}]} \left| \sum_{i_0 + i_1 + i_2 + i_3 \leq m} A_{i_0 \dots i_3} D_\xi^{i_0 + \dots + i_3} \prod_{j=0}^3 \chi(j) \right|$$

where $D_\xi^{i_0 + \dots + i_3}$ stands for

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_0} \right)^{i_0} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \right)^{i_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi_3} \right)^{i_3}$$

If we set

$$\frac{\xi_j - \operatorname{Re} q_j}{a} = u_j$$

then

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial u_j}$$

but the derivatives of χ are bounded since χ is a C^∞ function, therefore

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} \varphi_\eta^a \right| = \left| \prod_{i \neq j} \chi_a(\sqrt{\eta_i^2 + \xi_i^2}) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \chi_a(\sqrt{\eta_j^2 + \xi_j^2}) \right| \leq \frac{C}{a}$$

and terms of $\|\varphi_\eta^a\|_m$ are of the form

$$(1/a)^{i_0 + \dots + i_s} C^{i_0 + \dots + i_s}.$$

Hence $\|\varphi_\eta^a\|_m < C_m \frac{1}{a^m}$ which is the majorization required.

Appendix IV

Plurisubharmonicity of φ and $\bar{\varphi}$

We recall that φ is *plurisubharmonic* in Ω (an open set in $\mathbb{C}_n$) if in the sense of distribution theory the quadratic form

$$\sum_{j,k} t_j \bar{t}_k \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \varphi(z)$$

is positive definite for any z in Ω and any $t = (t_1, \dots, t_n)$ in $\mathbb{C}_n$. It will be strictly plurisubharmonic if there exists a positive function $c(z) \in C(\Omega)$ such that

$$\sum_{j,k} t_j \bar{t}_k \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \varphi(z) - c(z) \sum_j t_j \bar{t}_j$$

is positive definite for any z in Ω and any t in $\mathbb{C}_n$.

Since φ and $\bar{\varphi}$ are the sum of three different types of terms, we have to check that each of those terms are plurisubharmonic.

1. Ω and $\Omega \times \mathbb{C}_3$ being domain of holomorphy $-\log d_\Omega = -\log d_{\Omega \times \mathbb{C}_3}$ is a plurisubharmonic function. A supremum of plurisubharmonic functions being subharmonic, $\sup \left(-\log d + \log(1 + \eta), \log \frac{1 + \eta}{\eta} \right)$ is plurisubharmonic.

2. $\log(1 + \|s\|^2 + \|p\|^2)$ or $\log(1 + \|p\|^2)$ are strictly plurisubharmonic functions.

After some elementary calculation one gets:

$$\sum t_j \bar{t}_k \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \log(1 + \|p\|^2 + \|s\|^2) \geq \frac{\|t\|^2}{(1 + \|p\|^2 + \|s\|^2)} \quad z = (p, s).$$

3. $|\operatorname{Im} s|$ or $|\operatorname{Im} p|$ are strictly plurisubharmonic functions.

One obtains:

$$\begin{aligned} \sum \frac{\partial^2}{\partial s_j \partial \bar{s}_k} |\operatorname{Im} s| t_j \bar{t}_k &= \theta(|\operatorname{Im} s|) \frac{1}{|\operatorname{Im} s|} (\|t\|^2 - \|t \cdot \operatorname{Im} \hat{s}\|^2) \\ &+ \|t\|^2 \delta(|\operatorname{Im} s|) + \|t \cdot \operatorname{Im} \hat{s}\|^2 (\delta(|\operatorname{Im} s|) + |\operatorname{Im} s| \delta'(|\operatorname{Im} s|)). \end{aligned}$$

Terms in δ and δ' are positive on any positive test-function and $\|t\|^2 - \|t \cdot \operatorname{Im} \hat{s}\|^2 \geq 0$ ($\operatorname{Im} \hat{s}$ is for a vector of direction $\operatorname{Im} s$ and of norm 1).

The denominator in $|\operatorname{Im} s|$ is non singular since integrable in a three dimensional space. The last term vanishes identically.

Therefore φ and $\bar{\varphi}$ are strictly plurisubharmonic and if we define $\chi(z)$ by $c(z) = e^{\chi(z)}$

$$\chi_{\varphi}(z) = \log 2(N + n) - 2 \log(1 + \|p\|^2),$$

$$\chi_{\bar{\varphi}}(z) = \log A - 2 \log(1 + \|p\|^2 + \|s\|^2).$$

Now we show that

$$|\bar{\varphi}(p, s) - \varphi(p)| \leq C \quad \text{for} \quad |p - s| \leq 1 \quad p \in \Omega \quad s \in \mathbb{C}_3.$$

We give a bound for the three kind of terms previously considered

$$1^\circ) A = \|\operatorname{Im} p\| - \|\operatorname{Im} s\|$$

$$A = \left| \frac{|\operatorname{Im} p|^2 - |\operatorname{Im} s|^2}{|\operatorname{Im} p| + |\operatorname{Im} s|} \right| = \left| \frac{\sum_j (|\operatorname{Im} p_j|^2 - |\operatorname{Im} s_j|^2)}{|\operatorname{Im} p| + |\operatorname{Im} s|} \right|$$

$$\leq \sum_i \left(\frac{|\operatorname{Im} p_i| + |\operatorname{Im} s_i|}{|\operatorname{Im} p| + |\operatorname{Im} s|} (|\operatorname{Im} p_i| - |\operatorname{Im} s_i|) \right) \leq 4.$$

$$2^\circ) B = |\log(1 + \|p\|^2 + \|s\|^2) - \log(1 + \|p\|^2)|$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1 + \|p\|^2}{1 + \|p\|^2 + \|s\|^2} \leq 1 \quad \text{thus} \quad B \leq \log 2.$$

3°) Since the distance in Ω is equal to the distance in $\Omega \times \mathbb{C}_3$, the difference vanishes.

Therefore there exists a constant $C(>0)$ such that

$$|\bar{\varphi}(p, s) - \varphi(p)| < C.$$

References

0. DYSON, F. J.: Phys. Rev. **110**, 579 and **110**, 1460 (1958).
1. OMNES, R.: Contribution to: Relations de Dispersion et Particules Elementaires. DE WITT and OMNES, Eds. Paris: Hermann 1960.
2. BROS, J., A. MESSIAH, and R. STORA: J. Math. Phys. **2**, 5, 639—651 (1961).
3. SCHWARTZ, L.: Theorie des Distributions (2 Vol.). Paris: Hermann 1957—1959.
4. STREATER, R. F., and A. S. WIGHTMAN: PCT, spin, statistics and all that. New-York: Benjamin 1964.
5. VLADIMIROV, V. S.: Methods of the theory of functions of several complex variables. Boston: MIT Press 1966.
6. HÖRMANDER, L.: Supports and singular supports of convolution. Acta Math. **110**, 3—4, 279—302 (1963).
7. EPSTEIN, H.: Thesis (non published) and 1965 Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, Vol. I.
8. HÖRMANDER, L.: L^2 estimates and existence theorem for the $\bar{\partial}$ operator. Acta Math. **113**, 91—152 (1965); or An introduction to complex analysis. In: Several variables. Princeton, N. J.: D. van Nostrand Comp. Inc. 1966.
9. FUKS, B. A.: Theory of analytic functions of several complex variables, Vol. 8 and Vol. 14 of: Translations of Mathematical Monographs.
10. BROS, J., H. EPSTEIN, and GLASER: Nuovo Cimento **31**, 1265 (1964).
11. — C. ITZYKSON, and F. PHAM: Représentations intégrales de fonctions analytiques et formule de Jost-Lehmann-Dyson. Ann. Inst. Poincaré **5**, 1 (1966).

R. SÉNÉOR

Centre de Physique Théorique
de l'Ecole Polytechnique
17, rue Descartes
F 75 Paris V

CONCLUSION

Nous avons vu d'après la première partie que la représentation de Dyson pouvait se comprendre comme solution de deux types de problèmes :

- 1) donner une représentation intégrale possédant certaines propriétés (par exemple le noyau est fonction uniquement de la structure géométrique des supports) pour les distributions tempérées satisfaisant à des conditions de support dans l'espace des x et dans l'espace des p .
- 2) donner une solution globale explicite d'un problème d'Edge of the Wedge opposés ([Ep 1]) dans $\mathbb{C}_4$.

Ces deux types de problème se généralisent aisément. Pour le premier il suffit de modifier les conditions de support soit dans l'espace des p , soit dans l'espace des x , soit dans les deux. L'extension que nous avons donnée dans la deuxième partie, qui généralise le support dans l'espace des x , ne semble pas être prometteuse. Nous n'avons fait que vérifier explicitement le fait intuitif que la solution était obtenue par superposition des solutions classiques. Il semblerait, si l'on s'en tient à l'esprit de la démonstration de Dyson, que le problème se ramène à trouver l'équation différentielle ou le système d'équations différentielles qui puisse être naturellement (quitte à utiliser des variables supplémentaires) associé à l'une des propriétés de support. C'est en ce sens que la généralisation de la formule de Dyson semble être très limitée.

Une autre généralisation qui serait particulièrement utile pour la physique, et qui concerne le deuxième type de problème, est le passage à n quadrivecteurs, c'est-à-dire au cas

où les tubes T^+ et T^- dans $\mathbb{T}_4$ sont remplacés par des tubes T^+ et T^- dans $\mathbb{T}_n$. Quelques progrès ont été obtenus par H. Epstein ([Ep 1]) dans le cas d'une région de coïncidence convexe $\mathcal{R}$. Une première étape pour cette généralisation consisterait à donner des représentations intégrales pour les multiples commutateurs. Dans le cas du double commutateur il semble que la formule généralisée de la deuxième partie permette d'obtenir la démonstration correcte d'un résultat de R.F. Streater ([St 2]).

Enfin dans le cadre des problèmes de type 2, c'est-à-dire de la version analytique, la question clef semble être la possibilité de décrire le complémentaire du domaine d'holomorphic comme union de variétés algébriques de codimension 1. Cette structure feuilletée en variétés algébriques, si elle existe, est apparemment associée à la structure du noyau dans la représentation intégrale. Il est d'autre part évident que problèmes de type 1 et problèmes de type 2 sont liés. L'intérêt d'une représentation intégrale pour les problèmes de type 1 dépendra de l'indépendance relative des conditions de support. Ainsi une propriété de quasi-analyticité, due à un lien avec les équations aux dérivées partielles, sera souvent équivalente -ainsi que nous l'avons vu dans la deuxième partie du Chapitre I- à une propriété d'analyticité due à un problème d'Edge of the Wedge.

REFERENCES

- [Bo 1] N.N. Bogoliubov, B.V. Medvedev, M.K. Polivanof : *Voprosi teorii, dispercionnikh sootnoshenii*, Fizmatgiz, 1958.
- [Bm 1] H.J. Bremermann, Die Holomorphiehüllen der Tuben -und Halbtubengebiete, *Math. Ann.*, 127 (1954), 771-775.
- [Br 1] J. Bros, A. Messiah, R. Stora, A problem of analytic completion related to the Jost-Lehmann-Dyson formula, *J. Math. Phys.*, 2 (1961), 639-651.
- [Br 2] J. Bros, C. Itzykson, F. Pham, Représentations intégrales de fonctions analytiques et formule de Jost-Lehmann-Dyson, *Ann. Inst. Poinc.*, 5 (1966).
- [Br 3] J. Bros, Les problèmes de construction d'enveloppes d'holomorphie en théorie quantique des champs, Séminaire d'analyse de P. Lelong, mars 1962.
- [Bw 1] F.E. Browder, On the "Edge of the Wedge" theorem, *Canad. J. of Math.*, 15 (1963), 125-131.
- [Co 1] R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Vol. 2, Interscience, 1962.
- [Dy 1] F.J. Dyson, Integral representations of causal commutators, *Phys. Rev.*, 110 (1958), 1460-1464.
- [Ep 1] H. Epstein, Thesis, unpublished.
- [Ep 2] H. Epstein, Generalization of the "Edge of the Wedge" theorem, *J. Math. Phys.*, 1 (1960), 524-531.
- [Gä 1] L. Gårding, B. Malgrange, Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques et partiellement elliptiques, *Math. Scand.*, 9 (1961), 5-21.
- [Ge 1] J.L. Gervais, M. Le Bellac, Some rules and Jost-Lehmann-Dyson representation, preprint, Orsay, July 1966.
- [Gu 1] I.M. Guelfand, G.E. Chilov, *Les distributions*, Dunod, 1962.
- [He 1] K. Hepp, On the analyticity properties of the scattering amplitude in relativistic quantum field theory, *Helv. Phys. Acta*, 37 (1964), 639-658.
- [Hö 1] L. Hörmander, *Linear partial differential operators*, Springer-Verlag, 1964.

- [Hø 2] L. Hörmander, An introduction to complex analysis in several variables, D. van Nostrand Comp. Inc., 1966.
- [Jo 1] R. Jost, H. Lehmann, Integral-Darstellung kausaler Kommutatoren, N. Cimento, 5 (1957), 1598-1610.
- [Le 1] H. Lehmann, Analytic properties of scattering amplitudes as functions of momentum transfer, N. Cimento, 10 (1958), 579-589.
- [Ni 1] L. Nirenberg, Uniqueness in Cauchy problems for differential equations with constant leading coefficients, Comm. in pure and applied math., 10 (1957), 89-105.
- [Om 1] R. Omnes, Démonstration des relations de dispersion dans Relations de dispersion et particules élémentaires, Hermann, (1960), 317-384.
- [Sc 1] L. Schwartz, Théorie des distributions, t.I et II, Hermann, 1951.
- [So 1] B. Schroer, P. Stichel, On equal-time commutation relations of renormalized currents in perturbation theory I, Comm. Math. Phys., 8 (1968), 327-337.
- [St 1] R.F. Streater, A.S. Wightman, PCT, Spin and Statistics, and All That, Benjamin, 1964.
- [St 2] R.F. Streater, The double commutator in quantum field theory, J. Math. Phys., 1 (1960), 231-233.
- [Vl 1] V.S. Vladimirov, Méthodes de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, Dunod, 1967.
- [Wi 1] A.S. Wightman, dans Relations de dispersions et particules élémentaires, Hermann, 1960.

